

4) Ondas Eletromagnéticas

Introdução

Um dos fatos mais importantes do eletromagnetismo, tanto teórico quanto experimental, é a existência de ondas acopladas de campo elétrico e magnético, que se propagam para longe das fontes, transportando parte da energia fornecida pelo agente físico que mantém as distribuições de carga e corrente no sistema. Sabe-se que isso ocorre apenas para fontes dependentes do tempo. As relações de interdependência entre os campos são precisamente definidas nas equações das leis de Ampere e Faraday. Na lei de Ampere existe uma parcela do rotacional do campo magnético que é proporcional à derivada no tempo do campo elétrico. De modo análogo, na lei de Faraday, o rotacional do campo elétrico é proporcional à derivada no tempo do campo magnético. A partir dessas relações, verificamos que campos estáticos são independentes entre si e campos variáveis no tempo são mutuamente dependentes um do outro. Mostraremos, neste capítulo, que essa dependência mútua resulta em equações de onda idênticas para ambos os campos. Ou seja, os campos elétrico e magnético de fontes variáveis no tempo têm a forma matemática de distribuições que se deslocam no espaço na medida em que o tempo passa. Esse fenômeno é denominado de onda eletromagnética.

A origem das ondas eletromagnéticas pode ser atribuída à irradiação de cargas elétricas em movimento não uniforme. Sabe-se muito bem que uma carga fixa em um certo referencial inercial gera campo elétrico radial isotropicamente distribuído em torno da posição da carga (Figura 4.1a). Além disso, uma carga estática não produz campo magnético. É possível mostrar teoricamente que uma carga em movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante, também produz campo elétrico radial, porém não mais isotropicamente distribuído no espaço. O campo é

mais intenso na direção perpendicular à direção do movimento da carga (Figura 4.1b). Uma carga em movimento uniforme também produz campo magnético, e este campo está na direção azimutal em relação à direção do movimento. Finalmente, uma carga acelerada produz campo elétrico que, além da componente radial, também apresenta uma componente na direção polar em relação à direção do movimento (Figura 4.1c). Esta componente de campo elétrico polar e o campo magnético azimutal constituem as componentes de campo associadas à onda eletromagnética gerada pela carga acelerada.

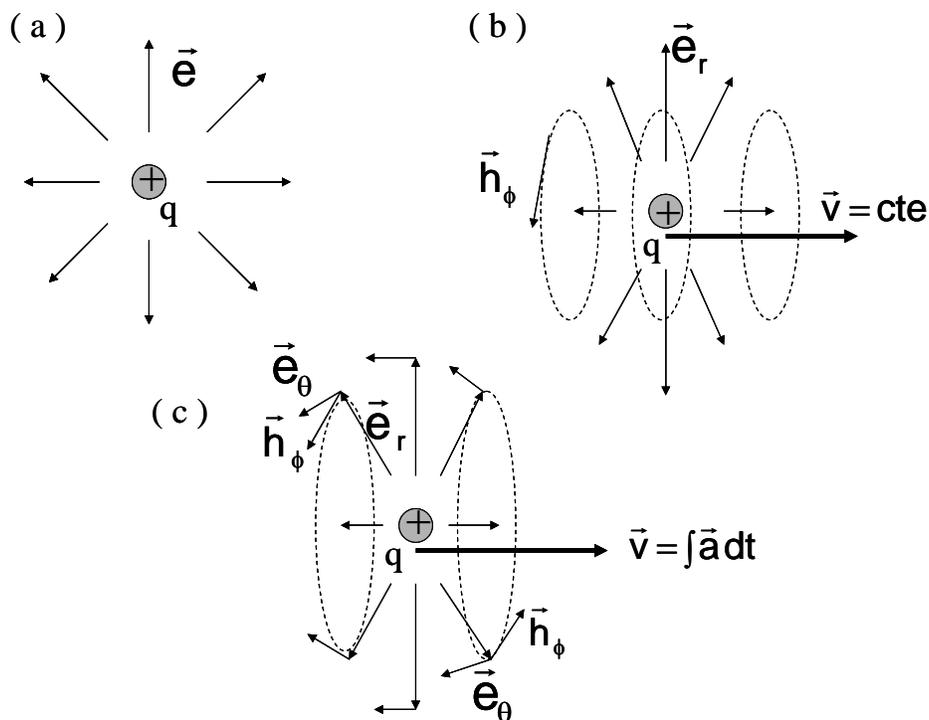


Figura 4.1 – Representação esquemática da irradiação de uma carga acelerada.

O Teorema de Poynting que será demonstrado neste capítulo estabelece que existe um fluxo de energia eletromagnética cuja densidade de potencia é dada por $\vec{e} \times \vec{h}$, onde os campos são provenientes da mesma fonte. Com base neste resultado, podemos concluir que apenas a carga acelerada irradia energia na direção radial, ou seja, pra longe de sua própria posição. Este processo está na base de diversos fenômenos conhecidos, como a radiação de frenagem de

partículas em alta velocidade (como ocorre em tubos de raios x) e a radiação de ciclotron.

As ondas eletromagnéticas são geradas continuamente pela matéria ordinária, a partir do incessante movimento de suas partículas elementares. Sempre que um átomo transita de um estado de maior energia para um de menor energia, ele irradia a diferença na forma de ondas eletromagnéticas. Este é o principal processo gerador de luz no universo. Isso tanto acontece no interior das estrelas a partir de reações nucleares, quanto no interior de um filamento metálico aquecido, devido à excitação e de-excitação de estados eletrônicos nos átomos. Mesmo à temperatura ambiente, qualquer amostra de matéria irradia continuamente devido à ativação de estados rotacionais e vibracionais moleculares, embora nesse caso, não se trate de radiação visível.

Mas, ondas eletromagnéticas também podem ser geradas por equipamentos produzidos pelo homem. Qualquer sistema elétrico baseado em corrente alternada irradia uma parte de sua energia na forma de ondas. O exemplo mais característico disso é a antena, uma estrutura metálica excitada por corrente alternada que acopla eficientemente um gerador de corrente alternada ao espaço livre, a fim de obter ondas eletromagnéticas.

As ondas eletromagnéticas constituem uma das formas mais importantes e básicas de interação e troca de energia entre sistemas físicos, sendo responsáveis por uma série de fenômenos bem conhecidos de todas as pessoas, como a visão, as cores dos objetos, o aquecimento produzido pelo sol e outros irradiadores, etc. As ondas eletromagnéticas também constituem a base de funcionamento de muitos sistemas e equipamentos modernos tais como os sistemas de telecomunicações, os fornos de microondas, os equipamentos ópticos e assim por diante.

Uma vez emitida, a onda eletromagnética não depende mais da fonte que a produziu. As ondas eletromagnéticas se propagam em alta velocidade e transportam energia na direção de propagação. Objetos interceptados pelas ondas eletromagnéticas, via de regra, absorvem uma parte da energia transportada ao

mesmo tempo em que espalham o restante da energia disponível em várias direções do espaço.

Este Capítulo trata do estudo da geração e propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo e em meios materiais, bem como de alguns eventos conseqüentes da interação de ondas eletromagnéticas com a matéria. Uma vez que este estudo exige o conhecimento básico da teoria ondulatória, sugere-se a leitura do Apêndice 4.1 àqueles que não estejam familiarizados com o tema.

Análise no domínio da freqüência

Os capítulos anteriores desenvolveram a teoria eletromagnética no domínio do tempo. Iniciamos este capítulo com a descrição da análise eletromagnética no domínio da freqüência por ser extremamente vantajosa a sua aplicação no estudo das ondas eletromagnéticas. A análise no domínio da freqüência exige a aplicação do princípio da superposição e portanto, somente pode ser usada em sistemas lineares. As equações de Maxwell expressam relações lineares entre os campos e as fontes no vácuo. Dentro da matéria, isso também se aplica desde que as propriedades macroscópicas condutividade, permissividade e permeabilidade sejam independentes dos campos aplicados.

Superposição

Sejam as fontes densidade de carga e densidade de corrente em um sistema eletromagnético, definidas como a soma de diversas parcelas:

$$(4.1) \quad \rho_v = \sum_n \rho_{vn} \quad \vec{j} = \sum_n \vec{j}_n$$

de tal modo que cada par de valores $[\rho_{vn}, \vec{j}_n]$ satisfaz individualmente a equação de continuidade:

$$(4.2) \quad \nabla \cdot \vec{j}_n = -\frac{\partial \rho_{vn}}{\partial t}$$

então, os campos produzidos por essas fontes também podem ser descritos pelo somatório de diversas parcelas, ou seja:

$$(4.3) \quad \vec{d} = \sum_n \vec{d}_n \quad \vec{e} = \sum_n \vec{e}_n \quad \vec{b} = \sum_n \vec{b}_n \quad \vec{h} = \sum_n \vec{h}_n$$

de modo que cada conjunto das componentes correspondente dessas grandezas $[\rho_{vn}, \vec{j}_n, \vec{d}_n, \vec{e}_n, \vec{b}_n, \vec{h}_n]$ satisfaz individualmente as equações de Maxwell, isto é:

$$(4.4) \quad \nabla \cdot \vec{d}_n = \rho_{vn} \quad \nabla \cdot \vec{b}_n = 0 \quad \nabla \times \vec{h}_n = \vec{j}_n + \frac{\partial \vec{d}_n}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{e}_n = -\frac{\partial \vec{b}_n}{\partial t}$$

Na descrição macroscópica dos campos em meios materiais, contudo, a linearidade será mantida desde que a polarização, a magnetização e a condução no meio sejam proporcionais aos campos aplicados, ou seja, desde que a permissividade elétrica, a permeabilidade magnética e a condutividade do material sejam independentes das intensidades dos campos. Assim sendo, podemos escrever:

$$(4.5) \quad \vec{d}_n = \epsilon \vec{e}_n \quad \vec{b}_n = \mu \vec{h}_n \quad \vec{j}_n = \sigma \vec{e}_n$$

Análise fasorial

A análise fasorial é uma técnica de representação e solução de equações diferenciais temporais aplicável a sistemas lineares excitados por fontes que variam no tempo segundo as funções trigonométricas $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ ou segundo as funções exponenciais complexas $e^{j\omega t}$ e $e^{-j\omega t}$. Todas essas funções têm a característica comum de serem periódicas e monocromáticas (frequência única). Estas funções podem ser representadas de maneira geral pelas expressões:

$$(4.6) \quad \sin(\omega t + \theta) \quad \cos(\omega t + \theta) \quad e^{j(\omega t + \theta)} \quad e^{-j(\omega t + \theta)}$$

onde o argumento $(\omega t + \theta)$ é denominado de fase, ω é a frequência angular e θ é a fase inicial. Usando a identidade de Euler ($e^{j\delta} = \cos \delta + j \sin \delta$), podemos escrever as funções trigonométricas na forma de funções exponenciais:

$$(4.7) \quad \sin(\omega t + \theta) = \frac{1}{2j} \left[e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)} \right]$$

$$(4.8) \quad \cos(\omega t + \theta) = \frac{1}{2} \left[e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)} \right]$$

Um sistema descrito por equações diferenciais lineares e excitado por uma fonte monocromática, terá necessariamente como resposta, funções monocromáticas no tempo com a mesma frequência da fonte. Assim qualquer sistema eletromagnético com fontes monocromáticas em um meio linear, pode ser analisado considerando-se que as respostas, tanto para os potenciais quanto para os campos, são funções monocromáticas do tempo. Esta análise é mais convenientemente realizada usando-se as funções exponenciais complexas, conforme se verá a seguir. Definimos o fasor correspondente a uma função monocromática do tempo como uma quantidade complexa cujo módulo é a amplitude dessa função e cujo ângulo polar é igual à fase inicial dessa função. Em um sistema eletromagnético excitado por fontes monocromáticas, os fasores que descrevem a densidade de carga e a densidade de corrente podem ser escritos na forma:

$$(4.9) \quad \Gamma = \rho_o e^{j\theta\rho} \quad \vec{J} = \vec{j}_o e^{j\theta j}$$

enquanto que para os campos e potenciais gerados temos:

$$(4.10) \quad \begin{array}{lll} \vec{D} = \vec{d}_o e^{j\theta d} & \vec{E} = \vec{e}_o e^{j\theta e} & \vec{B} = \vec{b}_o e^{j\theta b} \\ \vec{H} = \vec{h}_o e^{j\theta h} & \Phi = \varphi_o e^{j\theta\varphi} & \vec{A} = \vec{a}_o e^{j\theta a} \end{array}$$

Onde as amplitudes e as fases podem variar com a posição no espaço mas não dependem do tempo. Usaremos a convenção de representar um fasor por letras maiúsculas, enquanto mantemos a convenção até aqui adotada de representar funções do tempo por letras minúsculas. Também adotamos o seguinte procedimento para obter uma função do tempo a partir do seu fasor: multiplicados o mesmo por $e^{j\omega t}$ e extraímos a parte real do resultado. Assim, para as fontes, temos:

$$(4.11) \quad \begin{array}{l} \rho = \text{Re}[\Gamma e^{j\omega t}] = \text{Re}[\rho_o e^{j\theta\rho} e^{j\omega t}] = \rho_o \cos(\omega t + \theta_\rho) \\ \vec{j} = \text{Re}[\vec{J} e^{j\omega t}] = \text{Re}[\vec{j}_o e^{j\theta j} e^{j\omega t}] = \vec{j}_o \cos(\omega t + \theta_j) \end{array}$$

e de maneira análoga, para os campos e potenciais, temos:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \vec{d} &= \operatorname{Re} \left[\vec{D} e^{j\omega t} \right] = \vec{d}_o \cos(\omega t + \theta_d) & \vec{e} &= \operatorname{Re} \left[\vec{E} e^{j\omega t} \right] = \vec{e}_o \cos(\omega t + \theta_e) \\ \vec{b} &= \operatorname{Re} \left[\vec{B} e^{j\omega t} \right] = \vec{b}_o \cos(\omega t + \theta_b) & \vec{h} &= \operatorname{Re} \left[\vec{H} e^{j\omega t} \right] = \vec{h}_o \cos(\omega t + \theta_h) \\ \varphi &= \operatorname{Re} \left[\Phi e^{j\omega t} \right] = \varphi_o \cos(\omega t + \theta_\varphi) & \vec{a} &= \operatorname{Re} \left[\vec{A} e^{j\omega t} \right] = \vec{a}_o \cos(\omega t + \theta_a) \end{aligned}$$

A análise de um sistema eletromagnético excitado por fontes monocromáticas pode ser realizada por meio da transformação das equações de Maxwell para a forma fasorial, resolução dessas equações no domínio da frequência e, uma vez obtidas as soluções para os fasores das grandezas desejadas, retornar ao domínio do tempo por meio das transformações indicadas em (4.12). Se diversas fontes com diferentes frequências estão presentes, as soluções para os potenciais e campos podem ser obtidas como a soma das respostas parciais para cada fonte, de acordo com o princípio da superposição. Trataremos agora de obter a forma fasorial das equações de Maxwell.

Lei de Gauss para a indução elétrica

Substituímos as funções monocromáticas que descrevem $\vec{d}(\vec{r}, t)$ e $\rho(\vec{r}, t)$ na equação da lei de Gauss para obter:

$$(4.13) \quad \nabla \cdot \left[\vec{d}_o \cos(\omega t + \theta_d) \right] = \rho_o \cos(\omega t + \theta_\rho)$$

Substituindo agora as funções cosseno por funções exponenciais de acordo com (4.8), obtemos:

$$(4.14) \quad \nabla \cdot \left[\frac{\vec{d}_o}{2} e^{j(\omega t + \theta_d)} + \frac{\vec{d}_o}{2} e^{-j(\omega t + \theta_d)} \right] = \frac{\rho_o}{2} e^{j(\omega t + \theta_\rho)} + \frac{\rho_o}{2} e^{-j(\omega t + \theta_\rho)}$$

Comparando os termos que multiplicam as funções $e^{j\omega t}$ e $e^{-j\omega t}$, obtemos as equações:

$$(4.15) \quad \nabla \cdot \left[\vec{d}_o e^{j\theta_d} \right] = \rho_o e^{j\theta_\rho}$$

$$(4.16) \quad \nabla \cdot \left[\vec{d}_o e^{-j\theta_d} \right] = \rho_o e^{-j\theta_\rho}$$

Mas, de acordo com (4.9) e (4.10) essas equações relacionam os fasores de indução elétrica e densidade de carga, ou seja:

$$(4.17) \quad \nabla \cdot \vec{D} = \Gamma$$

$$(4.18) \quad \nabla \cdot \vec{D}^* = \Gamma^*$$

Onde \vec{D}^* e Γ^* são os complexos conjugados dos fasores \vec{D} e Γ respectivamente. Já que (4.18) é exatamente o complexo conjugado de (4.17), essas equações tem a mesma solução, e portanto podemos considerar (4.17) como a forma fasorial da lei de Gauss para a indução elétrica.

Lei de Gauss para a indução magnética

Substituímos a função monocromática $\vec{b}(\vec{r}, t)$ na equação da lei de Gauss para obter:

$$(4.19) \quad \nabla \cdot [\vec{b}_o \cos(\omega t + \theta_b)] = 0$$

Substituindo a função cosseno por funções exponenciais e separando os termos que multiplicam as funções $e^{j\omega t}$ e $e^{-j\omega t}$, obtemos as equações:

$$(4.20) \quad \nabla \cdot [\vec{b}_o e^{j\theta_b}] = 0$$

$$(4.21) \quad \nabla \cdot [\vec{b}_o e^{-j\theta_b}] = 0$$

De acordo com (4.10) essas equações nos levam a forma fasorial da lei de Gauss para a indução magnética:

$$(4.22) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Lei de Ampere

Substituindo as funções monocromáticas na equação da lei de Ampere, obtemos:

$$(4.23) \quad \nabla \times [\vec{h}_o \cos(\omega t + \theta_h)] = \vec{j}_o \cos(\omega t + \theta_j) + \frac{\partial}{\partial t} [\vec{d}_o \cos(\omega t + \theta_d)]$$

Substituindo agora as funções cosseno, obtemos:

$$(4.24) \quad \nabla \times \left[\frac{\vec{h}_o}{2} e^{j(\omega t + \theta_h)} + \frac{\vec{h}_o}{2} e^{-j(\omega t + \theta_h)} \right] = \frac{\vec{j}_o}{2} e^{j(\omega t + \theta_j)} + \frac{\vec{j}_o}{2} e^{-j(\omega t + \theta_j)} + \frac{\vec{d}_o}{2} j\omega e^{j(\omega t + \theta_d)} - \frac{\vec{d}_o}{2} j\omega e^{-j(\omega t + \theta_d)}$$

Separando os termos que multiplicam as funções $e^{j\omega t}$ e $e^{-j\omega t}$, obtemos:

$$(4.25) \quad \nabla \times [\vec{h}_o e^{j\theta h}] = \vec{j}_o e^{j\theta j} + j\omega \vec{d}_o e^{j\theta d}$$

$$(4.26) \quad \nabla \times [\vec{h}_o e^{-j\theta h}] = \vec{j}_o e^{-j\theta j} - j\omega \vec{d}_o e^{-j\theta d}$$

Assim , vemos que a lei de Ampere na forma fasorial assume a forma:

$$(4.27) \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}$$

Lei de Faraday

Substituindo as funções monocromáticas na equação da lei de Faraday, obtemos:

$$(4.28) \quad \nabla \times [\vec{e}_o \cos(\omega t + \theta_e)] = -\frac{\partial}{\partial t} [\vec{b}_o \cos(\omega t + \theta_b)]$$

Substituindo agora as funções cosseno, obtemos:

$$(4.29) \quad \nabla \times \left[\frac{\vec{e}_o}{2} e^{j(\omega t + \theta_e)} + \frac{\vec{e}_o}{2} e^{-j(\omega t + \theta_e)} \right] = -\frac{\vec{b}_o}{2} j\omega e^{j(\omega t + \theta_b)} + \frac{\vec{b}_o}{2} j\omega e^{-j(\omega t + \theta_b)}$$

Separando os termos que multiplicam as funções $e^{j\omega t}$ e $e^{-j\omega t}$, obtemos:

$$(4.30) \quad \nabla \times [\vec{e}_o e^{j\theta_e}] = -j\omega \vec{b}_o e^{j\theta_b}$$

$$(4.31) \quad \nabla \times [\vec{e}_o e^{-j\theta_e}] = j\omega \vec{b}_o e^{-j\theta_b}$$

Assim , vemos que a lei de faraday na forma fasorial assume a forma:

$$(4.32) \quad \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

De maneira completamente análoga ao que foi mostrado acima para as equações de Maxwell, podemos demonstrar que a equação da continuidade na forma fasorial é escrita na forma:

$$(4.33) \quad \nabla \cdot \vec{J} = -j\omega \Gamma$$

E também as relações constitutivas podem ser escritas na forma fasorial:

$$(4.34) \quad \vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Podemos antecipar neste ponto que as propriedades ϵ , μ e σ podem variar com a freqüência, sendo essa característica responsável por importantes efeitos na propagação de ondas eletromagnéticas nesses meios. A Tabela 4.1 mostra um resumo das equações eletromagnéticas para análise fasorial.

Uma extensão da análise fasorial para o caso de funções não monocromáticas é a análise de Fourier. Pode-se mostrar que qualquer função periódica pode ser escrita na forma de uma série de funções monocromáticas com frequências múltiplas de uma frequência fundamental. Uma vez obtida a série de Fourier de uma distribuição de carga ou corrente, é possível aplicar os métodos da análise fasorial para cada uma das componentes monocromáticas do sistema a fim de obter os campos associados. Os campos resultantes, de acordo com o princípio da superposição, serão obtidos pela soma dos campos devido a cada componente monocromática, ou seja, os campos também serão descritos por séries de Fourier.

Tabela 4.1 – Equações eletromagnéticas fasoriais

Lei de Gauss para a indução elétrica	$\nabla \cdot \vec{D} = \Gamma$
Lei de Gauss para a indução magnética	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Lei de Ampere	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}$
Lei de Faraday	$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}$
Equação da continuidade	$\nabla \cdot \vec{J} = -j\omega \Gamma$
Relações constitutivas	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$ $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H}$ $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

Equação da onda eletromagnética

A onda eletromagnética é descrita por equações diferenciais parciais no tempo e no espaço para seus dois campos, elétrico e magnético. Nesta seção e em grande parte deste capítulo estaremos interessados na descrição de ondas no espaço ilimitado, ou seja, sem fronteiras. Esta é uma simplificação que serve para se estudar as características principais de propagação de ondas eletromagnéticas com um mínimo de complexidade matemática. Situações reais quase sempre

envolvem interfaces entre meios com diferentes propriedades eletromagnéticas e nesses casos ocorrem fenômenos como reflexão, refração e difração, os quais modificam a distribuição dos campos e o fluxo da energia transportada pela onda. Além disso, em geral assume-se que o meio é linear, ou seja, as propriedades condutividade elétrica, permissividade elétrica e permeabilidade magnética em uma certa frequência são consideradas constantes independentes das intensidades dos campos. Uma última consideração simplificadora em um estudo introdutório das ondas eletromagnéticas diz respeito à homogeneidade e isotropia das propriedades eletromagnéticas do meio. Em um meio homogêneo e isotrópico as propriedades são independentes da posição e direção em qualquer sistema de referência no qual sejam avaliadas.

Equação da onda eletromagnética no domínio do tempo

A descrição das ondas eletromagnéticas pela teoria clássica é obtida com a aplicação direta das equações de Maxwell. Iniciaremos com a descrição no domínio do tempo. A Figura 4.2 mostra esquematicamente um sistema eletromagnético constituído por distribuições de carga e corrente elétrica em um certo volume finito do espaço e os campos decorrentes dessas fontes, consideradas aqui implicitamente como variáveis no tempo. Consideremos então a equação da Lei de Ampere:

$$(4.35) \quad \nabla \times \vec{h} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}$$

onde a distribuição de densidade de corrente no espaço pode ser o resultado de vários processos físicos que por conveniência de análise serão agrupados de duas categorias: (1) a corrente das fontes \vec{j}_s , que será considerada sempre como tendo uma distribuição localizada, ou seja, limitada a um volume finito e (2) a corrente produzida pelo campo elétrico da própria onda eletromagnética. Esta contribuição pode ser escrita na forma $\vec{j}_c = \sigma \vec{e}$ se o meio for um condutor linear. A distribuição de corrente \vec{j}_s geralmente será produzida por fontes de potencial elétrico conectadas a um sistema de condutores, como por exemplo, em uma

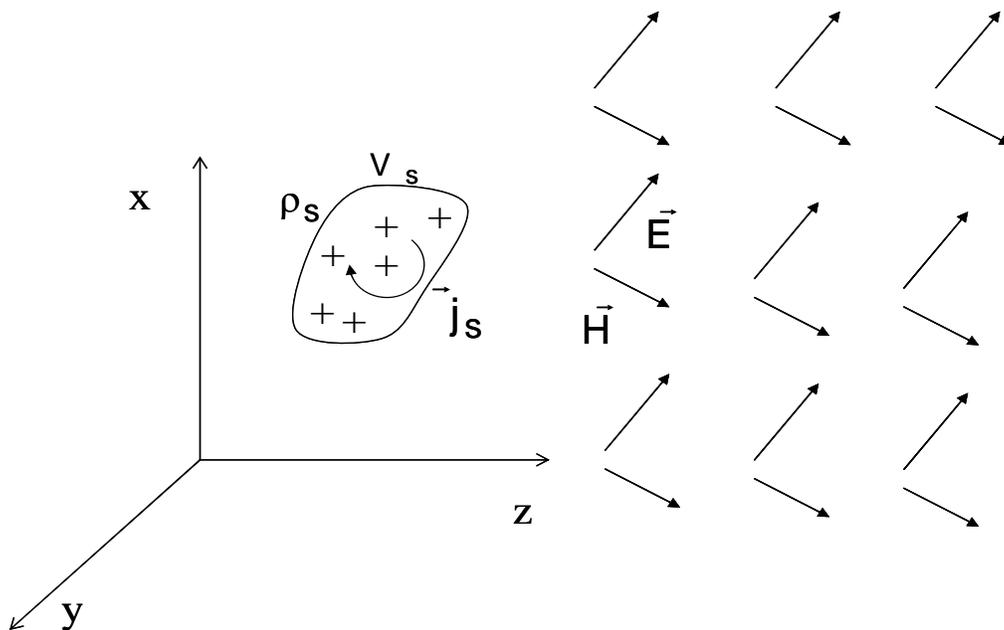


Figura 4.2 – Representação esquemática de um sistema eletromagnético constituído por uma distribuição localizada de carga e corrente e seus campos associados.

antena. Fazendo a substituição $\vec{j} = \vec{j}_s + \vec{j}_c$ em (4.35) e aplicando o rotacional em ambos os lados dessa equação, resulta:

$$(4.36) \quad \nabla \times \nabla \times \vec{h} = \nabla \times \vec{j}_s + \nabla \times \vec{j}_c + \frac{\partial(\nabla \times \vec{d})}{\partial t}$$

Para um meio linear, homogêneo e isotrópico podemos substituir a densidade de corrente de condução e a indução elétrica pelas conhecidas relações em função do campo elétrico, considerando a condutividade e a permissividade elétrica como constantes independentes da posição e direção no espaço. Além disso, podemos utilizar uma transformação vetorial para reescrever o primeiro membro da equação (4.36). Com isso, obtemos:

$$(4.37) \quad \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h} = \nabla \times \vec{j}_s + \sigma \nabla \times \vec{e} + \varepsilon \frac{\partial \nabla \times \vec{e}}{\partial t}$$

Podemos agora utilizar a lei de Gauss para eliminar o primeiro termo em (4.37) e a lei de Faraday para substituir $\nabla \times \vec{e}$ em função do campo magnético. Além disso, se estamos interessados na distribuição dos campos apenas no volume externo

àquela ocupado pela fontes, então o termo \vec{j}_s é nulo nesse espaço. Com as substituições citadas podemos escrever (4.37) na forma:

$$(4.38) \quad \nabla^2 \vec{h} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2}$$

Esta é a equação de onda para o campo magnético em um meio linear, homogêneo e isotrópico. Podemos obter uma equação equivalente para o campo elétrico por um processo semelhante. Iniciamos pela lei de Faraday e consideremos que a linearidade, homogeneidade e isotropia se aplicam também às propriedades magnéticas do meio. Aplicamos o rotacional em ambos os lados da equação da lei de Faraday:

$$(2.39) \quad \nabla \times \nabla \times \vec{e} = -\mu \frac{\partial (\nabla \times \vec{h})}{\partial t}$$

Usando a lei de Ampere para substituir o rotacional do campo magnético, obtemos:

$$(4.40) \quad \nabla \nabla \cdot \vec{e} - \nabla^2 \vec{e} = -\mu \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2}$$

De acordo com a Lei de Gauss, o primeiro membro do lado esquerdo se anula nos meios onde a densidade de carga macroscópica é nula. Assim, fora do volume ocupado pelas fontes, em um meio eletricamente neutro, temos a equação de onda para o campo elétrico idêntica àquela para o campo magnético:

$$(4.41) \quad \nabla^2 \vec{e} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2}$$

Estas equações, (4.38) e (4.41), descrevem as relações entre as derivadas espaciais e a derivada temporal dos campos em uma onda eletromagnética. Suas soluções para as condições iniciais e de contorno peculiares a cada sistema físico devem, a princípio, descrever completamente a propagação de ondas eletromagnéticas a partir de fontes dependentes do tempo em meios ilimitados, homogêneos, isotrópicos e lineares. Em um meio não condutor o termo dependente da condutividade é nulo e estas equações assumem a forma mais simples:

$$(4.42) \quad \nabla^2 \vec{h} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2}$$

$$(4.43) \quad \nabla^2 \vec{e} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2}$$

Onde a constante $v = (\mu\epsilon)^{-1/2}$ é conhecida como velocidade da luz no meio. No vácuo essa constante assume um valor bem conhecido em torno de $c = 3 \times 10^8$ metros por segundo, sendo uma grandeza fundamental em várias teorias da física. As equações (4.42) e (4.43) estão na forma conhecida como equação de D'Alembert.

Equação da onda eletromagnética no domínio da frequência

É consideravelmente mais simples analisar a propagação de ondas eletromagnéticas monocromáticas, ou seja, de uma única frequência, do que de uma fonte qualquer. As frequências de uma onda eletromagnética são àquelas das fontes que produzem os campos. Assim, ondas monocromáticas são geradas a partir de fontes monocromáticas. Neste caso podemos usar o recurso da análise fasorial para obter uma simplificação importante nas equações de onda.

Podemos seguir passo a passo aqui o mesmo método aplicado anteriormente para deduzir as equações de onda no domínio do tempo, apenas substituindo as equações de Maxwell e as relações constitutivas por suas equivalentes na forma fasorial. A aplicação do rotacional na equação da lei de Ampere nos leva ao seguinte resultado:

$$(4.44) \quad \nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla \times \vec{J}_s + \nabla \times \vec{J}_c + j\omega \nabla \times \vec{D}$$

Com a substituição das relações constitutivas e com as mesmas considerações a respeito da localização das fontes, obtemos o equivalente fasorial da equação de onda para o campo magnético em um meio linear, homogêneo e isotrópico na forma:

$$(4.45) \quad \nabla^2 \vec{H} = j\omega\mu\sigma \vec{H} - \omega^2\mu\epsilon \vec{H} \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \vec{H} = \gamma^2 \vec{H}$$

Do mesmo modo, iniciando com o rotacional da equação da lei de Faraday e substituindo as relações constitutivas, podemos obter a equação de onda para o campo elétrico em um meio eletricamente neutro:

$$(4.46) \quad \nabla^2 \vec{E} = j\omega\mu\sigma \vec{E} - \omega^2\mu\varepsilon \vec{E} \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \vec{E} = \gamma^2 \vec{E}$$

As equações diferenciais (4.45) e (4.46) descrevem as distribuições espaciais dos fasores dos campos gerados por uma fonte monocromática. Com a especificação correta das condições de contorno apropriadas a cada sistema físico, podemos, a princípio, obter uma descrição completa da propagação de ondas eletromagnéticas monocromáticas em um meio ilimitado a partir das soluções dessas equações. A constante γ nessas equações é denominada de constante de propagação e pode ser escrita na forma:

$$(4.47) \quad \gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$

onde α é a constante de atenuação e β a constante de fase da onda. Em um meio de condutividade nula, (4.45) e (4.46) podem ser escritas na forma mais simples:

$$(4.48) \quad \nabla^2 \vec{H} = -\omega^2\mu\varepsilon \vec{H} \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \vec{H} = -\beta^2 \vec{H}$$

$$(4.49) \quad \nabla^2 \vec{E} = -\omega^2\mu\varepsilon \vec{E} \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \vec{E} = -\beta^2 \vec{E}$$

Onde $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v}$. Esta forma das equações da onda eletromagnética é denominada de equação de Helmholtz. A Tabela 4.2 resume as formas da equação de onda eletromagnética no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Equação da onda eletromagnética em coordenadas retangulares

No sistema retangular os campos são descritos pelas expressões (ver Figura 4.3):

$$(4.50) \quad \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_x(x, y, z) \hat{x} + \vec{E}_y(x, y, z) \hat{y} + \vec{E}_z(x, y, z) \hat{z}$$

$$(4.51) \quad \vec{H}(x, y, z) = \vec{H}_x(x, y, z) \hat{x} + \vec{H}_y(x, y, z) \hat{y} + \vec{H}_z(x, y, z) \hat{z}$$

Cada componente dos campos é uma função das três coordenadas espaciais. Substituindo essas expressões nas equações de onda (4.45) e (4.46) e separando as componentes retangulares, obtemos seis equações de onda:

$$(4.52) \quad \nabla^2 E_x = \gamma^2 E_x$$

$$(4.53) \quad \nabla^2 E_y = \gamma^2 E_y$$

$$(4.54) \quad \nabla^2 E_z = \gamma^2 E_z$$

$$(4.55) \quad \nabla^2 H_x = \gamma^2 H_x$$

$$(4.56) \quad \nabla^2 H_y = \gamma^2 H_y$$

$$(4.57) \quad \nabla^2 H_z = \gamma^2 H_z$$

Tabela 4.2 – Formas da equação de onda eletromagnética

Equação de onda	geral	meio não dissipativo
Domínio do tempo	$\nabla^2 \bar{e} = \sigma\mu \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial t^2}$ $\nabla^2 \bar{h} = \sigma\mu \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial t^2}$	$\nabla^2 \bar{e} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial t^2}$ $\nabla^2 \bar{h} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial t^2}$
Domínio da frequência	$\nabla^2 \bar{E} = \gamma^2 \bar{E}$ $\nabla^2 \bar{H} = \gamma^2 \bar{H}$ $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$	$\nabla^2 \bar{E} = -\beta^2 \bar{E}$ $\nabla^2 \bar{H} = -\beta^2 \bar{H}$ $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$

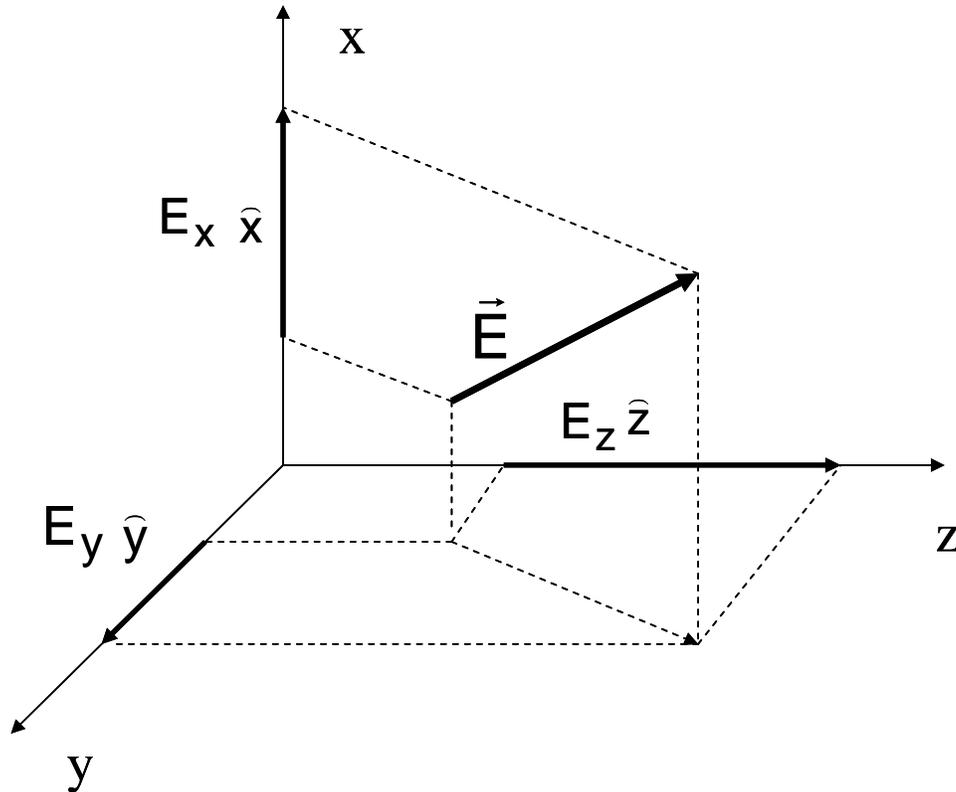


Figura 4.3 – Representação de um campo vetorial no sistema de coordenadas retangulares.

Cada uma dessas equações pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Supomos que a solução geral para a componente x do campo elétrico, por exemplo, pode ser escrita na forma de um produto de três funções, cada uma dependente apenas de uma das coordenadas de posição:

$$(4.58) \quad E_x = X(x)Y(y)Z(z)$$

Substituindo em (4.52) e abrindo o operador laplaciano nas três componentes retangulares, obtemos a expressão:

$$(4.59) \quad YZ \frac{d^2X}{dx^2} + XZ \frac{d^2Y}{dy^2} + XY \frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 XYZ$$

Note que ao escrever esta equação usamos derivadas totais, pois as funções X , Y e Z dependem apenas de uma variável. Dividindo ambos os lados dessa equação por XYZ , resulta:

$$(4.60) \quad \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2$$

Cada termo do lado esquerdo é uma função apenas de uma das três variáveis e a soma desses termos resulta em um valor constante em qualquer posição do espaço, ou seja, para quaisquer valores dessas coordenadas. Então, a única solução possível é admitir que cada termo independentemente seja igual a uma constante, ou seja:

$$(4.61) \quad \frac{d^2X}{dx^2} = \gamma_x^2 X$$

$$(4.62) \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = \gamma_y^2 Y$$

$$(4.63) \quad \frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma_z^2 Z$$

Onde as constantes γ_x , γ_y e γ_z devem ser escolhidas de modo que satisfaçam a seguinte relação:

$$(4.64) \quad \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = \gamma^2$$

Agora, cada uma das equações (4.61) a (4.63) tem uma solução bem conhecida na forma de exponenciais complexas. Então podemos escrever:

$$(4.65) \quad X(x) = X_1 e^{-\gamma_x x} + X_2 e^{\gamma_x x}$$

$$(4.66) \quad Y(y) = Y_1 e^{-\gamma_y y} + Y_2 e^{\gamma_y y}$$

$$(4.67) \quad Z(z) = Z_1 e^{-\gamma_z z} + Z_2 e^{\gamma_z z}$$

Onde os coeficientes X_1 , X_2 , Y_1 , Y_2 , Z_1 e Z_2 são constantes que devem ser determinadas a partir de condições de contorno conhecidas para o sistema sob análise. Assim, a solução geral para a componente x do campo elétrico na onda eletromagnética descrita em coordenadas retangulares pode ser escrita na forma:

$$(4.68) \quad E_x(x,y,z) = \left(X_1 e^{-\gamma_x x} + X_2 e^{\gamma_x x} \right) \left(Y_1 e^{-\gamma_y y} + Y_2 e^{\gamma_y y} \right) \left(Z_1 e^{-\gamma_z z} + Z_2 e^{\gamma_z z} \right)$$

E o mesmo se aplica a cada uma das demais componentes.

Em outros sistemas de coordenadas, como o sistema cilíndrico ou o sistema esférico, não é possível obter equações desacopladas para todas as componentes dos campos, o que torna a análise da propagação de ondas eletromagnéticas nesses sistemas um problema bem mais complexo. Por enquanto usaremos apenas o sistema retangular, já que o mesmo se presta muito bem à descrição de ondas no espaço ilimitado. Reservaremos para o final do capítulo alguns exemplos da utilização de outros sistemas de coordenadas.

Onda plana em um espaço ilimitado

Analisaremos agora as características gerais de ondas eletromagnéticas se propagando em um espaço ilimitado com propriedades eletromagnéticas independentes da posição e direção no espaço. Para isso, usaremos uma aproximação muito útil. Consideraremos que a fonte da irradiação localiza-se muito distante do local onde estamos calculando os campos da onda. Sendo um meio homogêneo e isotrópico, e estando muito distante da fonte, é razoável supor que, em uma certa área atravessada pela onda eletromagnética, os campos não variam nas direções paralelas ao plano dessa superfície. Isto é plenamente justificável através do conceito de fluxo de potência no campo eletromagnético, de acordo com o Teorema de Poynting (Apêndice 4.2). Demonstra-se que existe um fluxo de potência na direção perpendicular ao plano definido pelos vetores de campo elétrico e magnético. Se esse fluxo de potência é uniforme em uma certa área atravessada pela onda, então os campos devem se distribuir uniformemente nessa superfície plana. Arbitrariamente, fixaremos os eixos x e y do sistema de referência paralelamente a esta superfície plana e determinaremos que todas as componentes de campo tem amplitude constante sobre ela. Esta geometria é apresentada na Figura 4.4 e descreve o que se denomina de **onda plana uniforme**. Demonstraremos que na onda plana uniforme, os campos elétrico e magnético estão contidos no plano perpendicular ao fluxo de potência. Será demonstrado também que, a fim de satisfazerem as equações de Maxwell, os campos elétrico e magnético devem ser perpendiculares entre si e a razão entre suas amplitudes deve ser uma constante independente da posição no espaço.

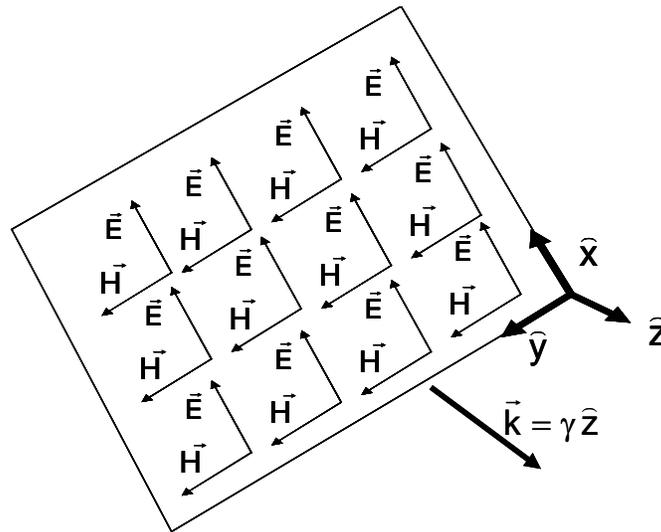


Figura 4.4 – Modelo de onda plana uniforme. Os campos estão contidos em planos paralelos e se distribuem uniformemente nessas superfícies. A onda se propaga na direção perpendicular aos planos. \vec{k} é denominado de vetor de onda.

Características gerais de propagação de ondas planas

Analisando a equação (4.68), concluímos que, se os campos são constantes no plano x-y do sistema de coordenadas, as constantes γ_x e γ_y devem ser nulas para a onda plana uniforme. Se todas as componentes de campo têm solução geral dada por (4.68), então, para a onda plana uniforme no sistema de referência mostrado na Figura 4.4, podemos escrever os campos na forma:

$$(4.69) \quad \vec{E} = \vec{E}_m^+ e^{-\gamma z} + \vec{E}_m^- e^{\gamma z}$$

$$(4.70) \quad \vec{H} = \vec{H}_m^+ e^{-\gamma z} + \vec{H}_m^- e^{\gamma z}$$

onde de acordo com (4.64), $\gamma_z = \gamma$, pois $\gamma_x = \gamma_y = 0$. As amplitudes \vec{E}_m^+ , \vec{E}_m^- , \vec{H}_m^+ , \vec{H}_m^- são constantes que devem ser determinadas a partir das condições de contorno em relação à direção z do sistema de coordenadas. Estas condições podem estar relacionadas, por exemplo, a intensidade da onda em uma certa posição z especificada e ou a possível ocorrência de reflexões no meio. Mostraremos que os termos que se somam nas equações (4.69) e (4.70)

representam ondas que se propagam em sentidos opostos na direção z . O primeiro termo no segundo membro de (4.69), $\vec{E}_m^+ e^{-\gamma z}$, por exemplo, corresponde a uma onda de campo elétrico propagando-se no sentido $z > 0$ e o segundo termo, $\vec{E}_m^- e^{\gamma z}$, corresponde a uma onda de campo elétrico propagando-se no sentido $z < 0$. Esses termos existem simultaneamente apenas se houver irradiação a partir de mais de uma fonte e em sentidos opostos ou no caso de um meio não homogêneo onde ocorra reflexão em uma interface produzindo uma onda refletida que se propaga em sentido oposto ao da onda incidente. Essas importantes ocorrências serão tratadas oportunamente. No momento desejamos considerar apenas a propagação no sentido $z > 0$ para uma única fonte localizada em um meio homogêneo e isotrópico (naturalmente, poderíamos considerar apenas a propagação no sentido negativo, mas as conclusões seriam idênticas).

Assim sendo, temos:

$$(4.71) \quad \vec{E} = \vec{E}_m e^{-\gamma z}$$

$$(4.72) \quad \vec{H} = \vec{H}_m e^{-\gamma z}$$

Estas equações descrevem a distribuição espacial dos campos em uma onda plana uniforme se propagando no sentido $z > 0$, sendo que \vec{E}_m e \vec{H}_m são os valores máximos desses campos. Já que se trata de uma análise fasorial, os resultados (4.71) e (4.72) descrevem os fasores de campo. A dependência temporal dos campos, como se sabe, é do tipo monocromática, ou seja, com uma frequência única, sendo esta definida pela fonte.

Substituindo (4.71) e (4.72) nas equações de Maxwell, podemos obter importantes relações entre os campos da onda plana. Por exemplo, substituindo na equação da Lei de Ampere dada em (4.27), teremos:

$$(4.73) \quad \nabla \times (\vec{H}_m e^{-\gamma z}) = (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E}_m e^{-\gamma z}$$

Aplicando a propriedade fasorial (C.10) e considerando que \vec{H}_m é constante, o termo do lado direito de (4.73) pode ser escrito na forma:

$$(4.74) \quad \nabla (e^{-\gamma z}) \times \vec{H}_m = e^{-\gamma z} (\vec{H}_m \times \vec{z}) \gamma$$

Levando isso em (4.73), obtemos o importante resultado:

$$(4.75) \quad \vec{H}_m \times \hat{z} = \frac{\sigma + j\omega\epsilon}{\gamma} \vec{E}_m$$

que mostra que o vetor de campo elétrico é perpendicular ao campo magnético e à direção de propagação da onda. Façamos agora o mesmo com a Lei de Faraday dada em (4.32):

$$(4.76) \quad \nabla \times (\vec{E}_m e^{-\gamma z}) = e^{-\gamma z} (\vec{E}_m \times \hat{z}) \gamma = -j\omega\mu \vec{H}_m e^{-\gamma z}$$

que nos leva a seguinte relação:

$$(4.77) \quad \vec{E}_m \times \hat{z} = -\frac{j\omega\mu}{\gamma} \vec{H}_m$$

que nos mostra que o campo magnético é perpendicular ao campo elétrico e à direção de propagação. A Figura 4.4 mostra um esquema possível no qual os campos satisfazem as exigências geométricas implícitas nas equações (4.75) e (4.77), ou seja, o campo elétrico sempre na direção x e o campo magnético sempre na direção y. O Vetor \vec{K} nesta figura é denominado de vetor de onda, sendo definido pela expressão:

$$(4.78) \quad \vec{K} = \gamma \hat{z}$$

Assim, concluímos que em uma onda plana, os vetores de campo são perpendiculares entre si e situam-se no plano transversal à direção de propagação da onda. Essas ondas são chamadas de **ondas transversais eletromagnéticas** e recebem a sigla **TEM**.

Uma outra importante conclusão a respeito das equações (4.75) e (4.77) é que elas levam a uma relação de proporcionalidade entre as intensidades dos campos da onda eletromagnética independente da posição no espaço. As relações entre as intensidades dos campos obtidas a partir dessas equações podem ser escritas na forma:

$$(4.79) \quad E_m = \frac{j\omega\mu}{\gamma} H_m$$

$$(4.80) \quad H_m = \frac{\sigma + j\omega\epsilon}{\gamma} E_m$$

Define-se a **impedância característica do meio**, simbolizada por Z_o , com sendo o quociente entre as amplitudes complexas do campo elétrico e do campo magnético perpendicular. A partir de (4.71) e (4.72), temos:

$$(4.81) \quad Z_o = \frac{E_m}{H_m}$$

Usando as relações (4.79) e (4.80) é fácil mostrar que:

$$(4.82) \quad Z_o = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

Esta é a expressão geral da impedância característica de um meio ilimitado onde as propriedades σ , μ e ε são iguais em todos as posições e direções do espaço. Note que a impedância característica de um meio pode ser uma quantidade complexa e pode depender da frequência da onda. Em um meio não condutor, entretanto, a impedância característica é real e independente da frequência, podendo ser escrita na forma mais simples:

$$(4.83) \quad Z_o = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} \cong 376,8 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \Omega$$

Portanto, no vácuo temos $Z_o \cong 376,8 \Omega$. O mesmo valor aproximado é aplicável para a propagação de ondas na atmosfera e outros ambientes contendo gases rarefeitos.

Do fato da impedância característica ser uma quantidade complexa em um meio condutor e devido à relação (4.81), concluímos que as amplitudes \vec{E}_m e \vec{H}_m devem ser representadas por números complexos. Assim, usando as referências indicadas na Figura 4.4 e a notação fasorial indicada em (4.10), podemos escrever \vec{E}_m e \vec{H}_m na forma:

$$(4.84) \quad \vec{E}_m = e_o e^{j\theta_{e_o}} \hat{x}$$

$$(4.85) \quad \vec{H}_m = h_o e^{j\theta_{h_o}} \hat{y}$$

Podemos também representar a impedância característica na forma polar:

$$(4.86) \quad Z_o = |Z_o| e^{j\phi}$$

De acordo com a equação (4.81) as amplitudes e os ângulos de fase inicial dos campos se relacionam entre si através da impedância característica por meio das equações:

$$(4.87) \quad \frac{e_o}{h_o} = |Z_o|$$

$$(4.88) \quad \theta_{e_o} - \theta_{h_o} = \phi$$

A impedância característica pode também ser expressa na forma retangular:

$$(4.89) \quad Z_o = R_o + jX_o$$

onde então R_o é a resistência característica e X_o é a reatância característica do meio.

Podemos agora obter expressões mais informativas sobre a forma dos campos da onda plana fazendo as substituições das equações (4.84) e (4.85) para as amplitudes dos campos nas equações (4.71) e (4.72). Além disso, lembrando que a constante de propagação é um número complexo, faremos a sua substituição pela expressão dada em (4.47). Com isso, obtemos:

$$(4.90) \quad \vec{E} = e_o e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z - \theta_{e_o})} \hat{x}$$

$$(4.91) \quad \vec{H} = h_o e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z - \theta_{h_o})} \hat{y}$$

Estas expressões mostram que tanto as fases quanto as amplitudes dos campos variam com a distância z percorrida pela onda eletromagnética. As amplitudes decaem exponencialmente com a propagação da onda, por isso, a constante α é denominada de **constante de atenuação**. A fase da onda varia linearmente com a distância percorrida, por isso a constante β é denominada de **constante de fase**. Podemos passar agora ao domínio do tempo aplicando a transformação indicada nas equações (4.11) e (4.12):

$$(4.92) \quad \bar{e} = \text{Re} \left[\vec{E} e^{j\omega t} \right] = e_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_{e_o}) \hat{x}$$

$$(4.93) \quad \bar{h} = \text{Re} \left[\vec{H} e^{j\omega t} \right] = h_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_{h_o}) \hat{y}$$

Na seqüência analisaremos casos particulares de grande importância.

Ondas em meios não dissipativos

Um material é não dissipativo se não absorve energia da onda eletromagnética. Podemos adiantar que todos os materiais absorvem energia eletromagnética em algum nível, pelo menos em algumas faixas de frequência. A análise espectral da absorção de energia e outras propriedades dependentes da frequência será objeto de estudo em outros capítulos. Por ora queremos estabelecer as características de propagação de ondas eletromagnéticas quando o material não absorve quantidade significativa de energia a partir da interação de suas partículas com os campos. Nesta condição podemos dizer de maneira bastante geral que o meio é não condutor, ou seja, que sua condutividade é nula ou desprezível (neste caso estamos nos referindo não somente a condutividade para campos estáticos, mas sim a condutividade total para campos variáveis no tempo). Portanto, para os objetivos desta análise, todo material não condutor constitui um meio não dissipativo.

Para um material em que $\sigma = 0$, a constante propagação dada em (4.47) assume o valor:

$$(4.94) \quad \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

e, portanto, a constante de atenuação é nula. A constante de fase, por sua vez, é dada por:

$$(4.95) \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \omega n \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

A constante característica do meio $n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$ é denominada de **índice de refração** do material. Conforme dito na seção 3.1, a constante universal $c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ é denominada de **velocidade da luz no vácuo**. Então,

(4.95) pode ser escrita na forma alternativa:

$$(4.96) \quad \beta = \frac{n}{c} \omega$$

Em um meio não dissipativo, os campos da onda eletromagnética plana são escritos na forma simples:

$$(4.97) \quad \vec{e} = e_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{x}$$

$$(4.98) \quad \vec{h} = h_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{y}$$

Observe que escrevemos os campos com mesmo ângulo de fase inicial nulo. Isso é possível porque a impedância do meio é real e, portanto, os campos estão em fase. Assim sendo, não há restrição alguma em considerar ambos os ângulos nulos. A Figura 4.5 mostra uma representação esquemática dos campos distribuídos em uma onda eletromagnética plana em um meio não dissipativo. Cada posição no eixo z define um plano que contém os vetores de campo elétrico e magnético. Em cada plano, as intensidades e fases desses campos são uniformes e os vetores têm sempre a mesma direção e sentido. Cada um desses planos é denominado de **frente de onda**. Cada frente de onda é caracterizada por uma fase constante. Nas equações (4.97) e (4.98) vemos que as fases dos campos dependem do tempo e da coordenada de posição e, por isso, em cada intervalo infinitesimal dt a frente de onda se desloca uma distância infinitesimal dz de modo que a variação total de fase dos campos seja nula. Assim, temos:

$$(4.99) \quad d(\omega t - \beta z) = \omega dt - \beta dz = 0$$

Chamamos de velocidade de fase da onda o quociente entre dz e dt . A Figura 4.6 mostra a distribuição de campo elétrico na onda eletromagnética em vários instantes de tempo. Podemos dizer que a onda está se deslocando na direção e sentido $z > 0$ com a velocidade de fase. De acordo com a equação anterior, a velocidade de fase de uma onda plana em um meio não dissipativo é dada por:

$$(4.100) \quad v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{n\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{n}$$

Onde o último termo foi obtido de (4.95). Como o índice de refração é 1 no vácuo e maior do que esse valor para qualquer meio material, concluímos que a velocidade de deslocamento da onda eletromagnética é no máximo igual a 'c' se o meio for o vácuo, e será sempre menor para qualquer outro meio.

Um ciclo completo dos campos monocromáticos ocorre em um intervalo de tempo T , chamado de **período da onda**, tal que a variação de fase correspondente seja 2π , ou seja:

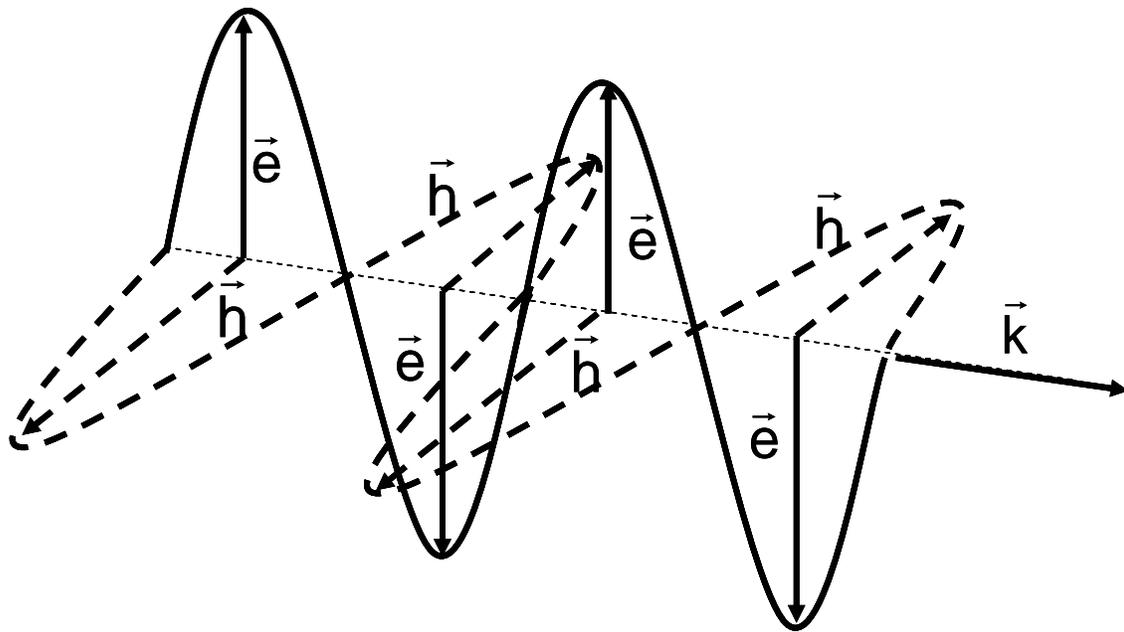
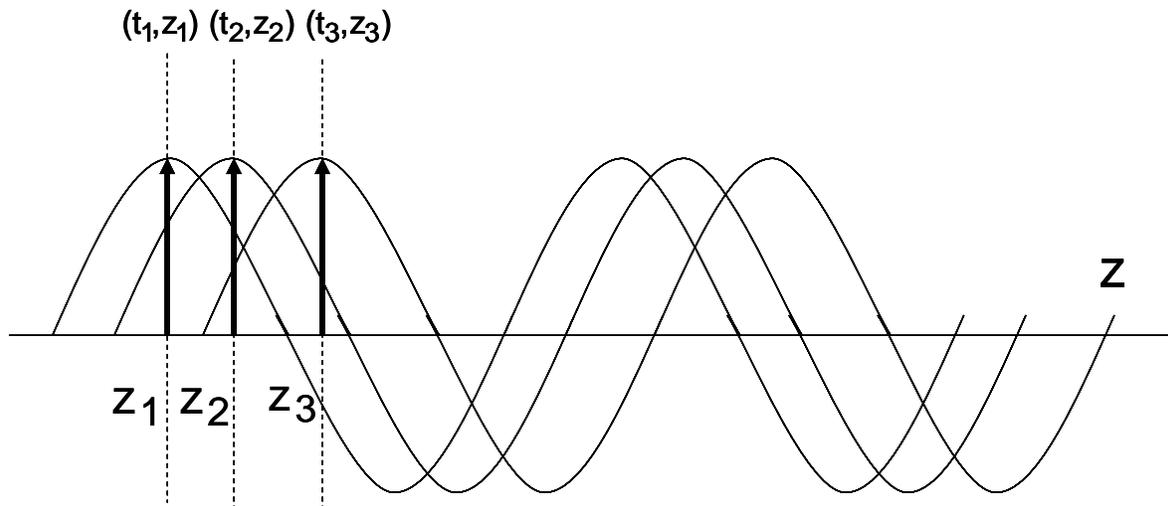


Figura 4.5 – Representação dos campos da onda plana distribuídos em uma linha paralela à direção de propagação. Somente os campos máximos foram indicados.



Frente de onda
fase = 2π rad $\rightarrow \omega t - \beta z = 2\pi$

Figura 4.6 – Deslocamento da onda na direção de propagação. Uma frente de onda se desloca assumindo diferentes posições em diferentes instantes de tempo. A fase na frente de onda, contudo, não varia.

$$(4.101) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Onde f é a frequência expressa em ciclos por segundo, ou seja, Hertz. Nesse intervalo de tempo, a onda se desloca uma distância λ denominada de **comprimento de onda**. As relações do comprimento de onda as demais grandezas já definidas são:

$$(4.102) \quad \lambda = vT = \frac{2\pi}{\beta}$$

Com as definições de T e λ , podemos reescrever (4.97) e (4.98) em uma forma alternativa:

$$(4.103) \quad \vec{e} = e_0 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \right] \hat{x}$$

$$(4.104) \quad \vec{h} = h_0 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \right] \hat{y}$$

Estas expressões evidenciam o caráter periódico no tempo e no espaço dos campos da onda eletromagnética. Em qualquer posição específica z , a cada intervalo de tempo igual a T , a fase da onda é acrescida de 2π radianos, ou seja, realiza um ciclo completo de variação dos campos. Por outro lado, em qualquer instante de tempo, duas frentes de onda separadas pela distância λ tem seus campos exatamente em fase.

Finalmente, em um meio não dissipativo os campos têm amplitude uniforme ao longo de todo o comprimento de propagação da onda e essas amplitudes estão relacionadas pela impedância do material, que tem apenas parte real R_0 não nula, segundo a expressão:

$$(4.105) \quad \frac{e_0}{h_0} = R_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Exemplo 4.1 – Uma antena na superfície da Terra irradia isotropicamente na atmosfera com uma potência máxima $p_0 = 100 \text{ W}$ e frequência 100 MHz . Considerando a superfície da Terra como sendo perfeitamente refletora, concluímos que toda a potência aplicada na antena pela fonte é acoplada à onda

eletromagnética gerada na atmosfera. Se a potência se propaga isotropicamente através da área $2\pi r^2$ da semi-esfera de raio r acima da superfície (ver Figura 4.7), a densidade de potência irradiada é:

$$(Ex.1) \quad |\vec{s}| = \frac{p_o}{2\pi r^2}$$

Se usarmos o modelo de onda plana transversal para descrever a propagação através de uma pequena área na frente de onda, podemos utilizar a relação (4.105) na expressão do vetor de Poynting para obter a partir de (Ex.1):

$$(Ex.2) \quad |\vec{e} \times \vec{h}| = \frac{e_o^2}{R_o} = R_o h_o^2 = \frac{p_o}{2\pi r^2}$$

Com isso, a uma distância r da antena, a intensidade dos campos é dada por:

$$(Ex.3) \quad e_o = \sqrt{\frac{R_o p_o}{2\pi}} \frac{1}{r}$$

$$(Ex.4) \quad h_o = \sqrt{\frac{p_o}{2\pi R_o}} \frac{1}{r}$$

A onda se propaga na direção radial com amplitude decrescente. A partir de uma grande distância $r = r_o$, uma área limitada na frente de onda pode ser aproximada por um plano perpendicular à direção de propagação. Podemos substituir $r = r_o$ nas equações anteriores para obter as amplitudes da onda plana correspondente nesta área. Com o valor $p_o = 100 \text{ W}$ e $R_o = 376.8 \Omega$, na distância de $r = 1000 \text{ m}$ da antena, de acordo com (Ex.3) e (Ex.4), as amplitudes dos campos são $e_o = 7,74 \times 10^{-2} \text{ V/m}$ e $h_o = 2,06 \times 10^{-4} \text{ A/m}$. Os demais parâmetros da onda são:

$$_v = c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$_\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 \text{ rad/s}$$

$$_\beta = \frac{2\pi f}{c} = 2,09 \text{ rad/m}$$

$$_T = \frac{1}{f} = 10^{-8} \text{ s} = 10 \text{ ns}$$

$$_\lambda = \frac{c}{f} = 3 \text{ m}$$

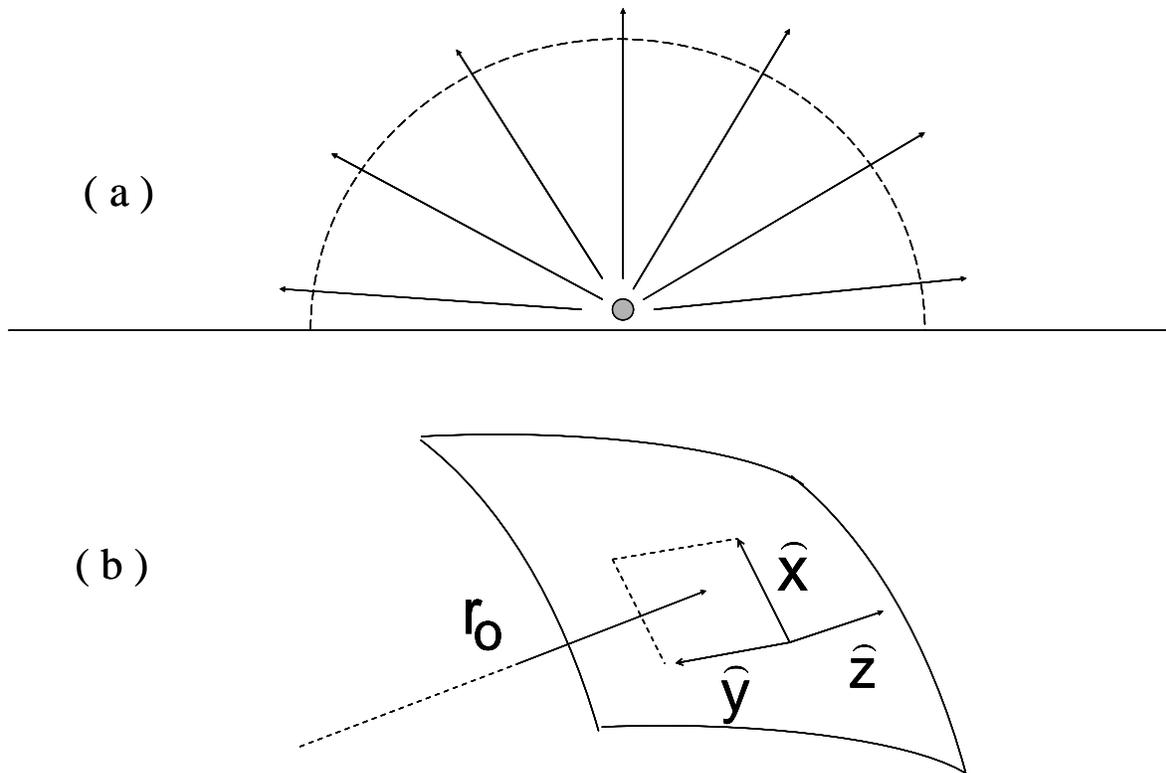


Figura 4.7 – (a) Representação esquemática da irradiação de uma fonte isotrópica através de uma superfície semi-esférica. (b) Modelo de onda plana transversal aplicado a uma pequena área da frente de onda.

Definindo a direção de propagação perpendicular ao plano como sendo a do eixo z , podemos escrever as expressões dos campos para $r = r_0 + z$ na forma:

$$(Ex.5) \quad \vec{e} = 7,74 \times 10^{-2} \cos(2\pi \times 10^8 t - 2,09 z) \hat{x} \quad (V/m)$$

$$(Ex.6) \quad \vec{h} = 2,06 \times 10^{-4} \cos(2\pi \times 10^8 t - 2,09 z) \hat{y} \quad (A/m)$$

onde z é a distância perpendicular medida a partir do plano $r = r_0$ e as direções \hat{x} e \hat{y} são paralelas a esse plano (Figura 4.7).

Ondas em meios dissipativos

Um material dissipativo absorve energia da onda na medida em que ela se propaga. Em qualquer frente de onda considerada, o fluxo de potência transportada pela onda, dada pelo vetor de Poynting, diminui na medida em que essa frente de onda se afasta da fonte. Iniciaremos obtendo expressões para a

impedância característica e para a constante de propagação no meio. A partir de (4.47), temos:

$$(4.106) \quad \gamma^2 = j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon = \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta$$

Podemos separar esta expressão em duas equações simultâneas para α e β :

$$(4.107) \quad \begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= \omega^2\mu\varepsilon \\ 2\alpha\beta &= \omega\mu\sigma \end{aligned}$$

Cuja solução nos leva aos valores da constante de atenuação e da constante de fase:

$$(4.108) \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2} - \omega\varepsilon}$$

$$(4.109) \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2}}{\omega\varepsilon} - 1 \right)}$$

A primeira observação a fazer é que a constante de atenuação é não nula, ou seja, os campos elétrico e magnético da onda serão atenuados pelo termo exponencial que aparece nas equações (4.92) e (4.93). Em segundo lugar, a constante de atenuação depende da frequência, ou seja, ondas de diferentes frequências sofrem atenuações diferentes em um mesmo material dissipativo. Finalmente, observamos que a constante de fase apresenta uma dependência bem mais complexa com a frequência do que no caso do meio não dissipativo. Como vimos na seção anterior, a velocidade de fase em um meio não dissipativo é uma constante característica do material e independente da frequência. Isto ocorre porque β é diretamente proporcional a ω . Em um meio dissipativo, por outro lado, β não é proporcional a ω e a velocidade de fase (dada em 2.100) depende da frequência da onda, isto é, ondas de diferentes frequências se propagam com velocidades diferentes. A dependência de α com ω e a dependência anômala de β com ω causam um importante efeito de distorção espectral em sinais eletromagnéticos compostos de muitas frequências. Isto será estudado mais tarde neste capítulo.

As equações (4.108) e (4.109) são expressões muito complexas para usar em todas as situações, principalmente quando levamos em conta a variação das

propriedades σ , μ e ε com a freqüência. Em algumas situações de interesse prático podemos obter expressões aproximadas para α e β . Por exemplo, se $\sigma \ll \omega\varepsilon$, a constante de propagação pode ser aproximada por:

$$(4.110) \quad \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2} \cong j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left(1 - j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

de modo que as constantes de atenuação e fase podem ser aproximadas por:

$$(4.111) \quad \alpha \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$(4.112) \quad \beta \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Neste caso, α não depende da freqüência e β é proporcional a ω . Esta situação ocorre principalmente em condutores pobres (água do mar por exemplo) na faixa de microondas e freqüências superiores. Por outro lado, se $\sigma \gg \omega\varepsilon$, a aproximação possível para γ será:

$$(4.113) \quad \gamma \cong \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

e as constantes de atenuação e fase podem, então, ser aproximadas por:

$$(4.114) \quad \alpha \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$(4.115) \quad \beta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Esta situação é típica de metais em praticamente toda a faixa de freqüências de interesse prático, incluindo luz visível.

A velocidade de fase de uma onda eletromagnética em um meio dissipativo, conforme já explicado acima, depende da freqüência da onda. De acordo com (4.100) e (4.109), a expressão geral da velocidade de fase é:

$$(4.116) \quad v = \frac{c/n}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2 \varepsilon^2}}{\omega\varepsilon} - 1 \right)}}$$

onde, como antes, usamos a definição do índice de refração $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ do material. Esta expressão também é muito complexa e sempre que possível preferimos utilizar aproximações. Para $\sigma \ll \omega\epsilon$, a equação (4.112) nos permite concluir que a velocidade de fase é independente da frequência e é dada pela mesma expressão aplicável a materiais não dissipativos. Contudo, para $\sigma \gg \omega\epsilon$, a equação (4.115) nos permite escrever a velocidade de fase na forma:

$$(4.117) \quad v \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

que nos mostra que a velocidade aumenta com a raiz quadrada da frequência. Obviamente esta conclusão está subordinada a condição $\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon}$.

A impedância característica de um material dissipativo também depende da frequência da onda. A expressão geral dada em (4.82) também pode ser desenvolvida para as duas condições de aproximação já usadas anteriormente. No primeiro caso, se a condutividade é pequena ou a frequência é suficientemente alta para que a condição $\sigma \ll \omega\epsilon$ seja válida, então a impedância pode ser aproximada por:

$$(4.118) \quad Z_o = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-1/2} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Neste caso, a resistência e a reatância característica do material podem ser aproximadas por:

$$(4.119) \quad R_o = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$(4.120) \quad X_o = \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

A resistência tem a mesmo valor que teria se o meio fosse não dissipativo. A reatância diminui com o aumento da frequência, de modo que a partir de algum valor limite, o meio se comporta como tendo impedância real. No outro caso, para $\sigma \gg \omega\epsilon$, a impedância característica pode ser aproximada por:

$$(4.121) \quad Z_o \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} + j \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

o que nos permite escrever as expressões aproximadas:

$$(4.122) \quad R_o \cong \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$$(4.123) \quad X_o \cong \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$$(4.124) \quad |Z_o| \cong \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

$$(4.125) \quad \phi \cong \frac{\pi}{4}$$

Vemos então que a resistência e a reatância são iguais, de pequeno valor e que aumentam com a frequência. Além disso, observamos que o ângulo polar da impedância é um valor fixo, o que indica que a defasagem entre o campo elétrico e o magnético é independente da frequência para $\omega \ll \sigma/\epsilon$. Como ϕ é positivo, o campo magnético está atrasado de 45° em relação ao campo elétrico.

Quando uma onda eletromagnética plana penetra em um meio dissipativo, as amplitudes dos campos passam a diminuir exponencialmente com a distância percorrida. A Figura 4.8 mostra a distribuição de campo elétrico em uma onda atenuada a partir da origem do sistema de coordenadas. De acordo com (4.92) a amplitude do campo elétrico é dada por:

$$(4.126) \quad e_m = e_o e^{-\alpha z}$$

onde z é a distância percorrida dentro do meio dissipativo e e_o é a amplitude na origem. Define-se a profundidade de penetração δ no meio como sendo a distância percorrida por qualquer frente de onda até a posição onde a amplitude é igual a $e_m(\delta) = e_o e^{-1}$, o que significa uma atenuação de cerca de 63% em relação a origem. Pela equação (4.126) vemos que a profundidade de penetração é igual ao inverso da constante de atenuação.

$$(4.127) \quad \delta = \frac{1}{\alpha}$$

Portanto, δ depende da condutividade do meio e da frequência da onda. Na condição $\sigma \ll \omega\epsilon$, usando (4.111), podemos escrever δ na forma:

$$(4.128) \quad \delta \cong \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

e para $\sigma \gg \omega\varepsilon$, usando (4.114), temos:

$$(4.129) \quad \delta \cong \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

As Tabelas 4.3 e 4.4 a seguir resumem as equações que definem as características de propagação de ondas planas em meios ilimitados e mostra a dependência de alguns parâmetros com a frequência.

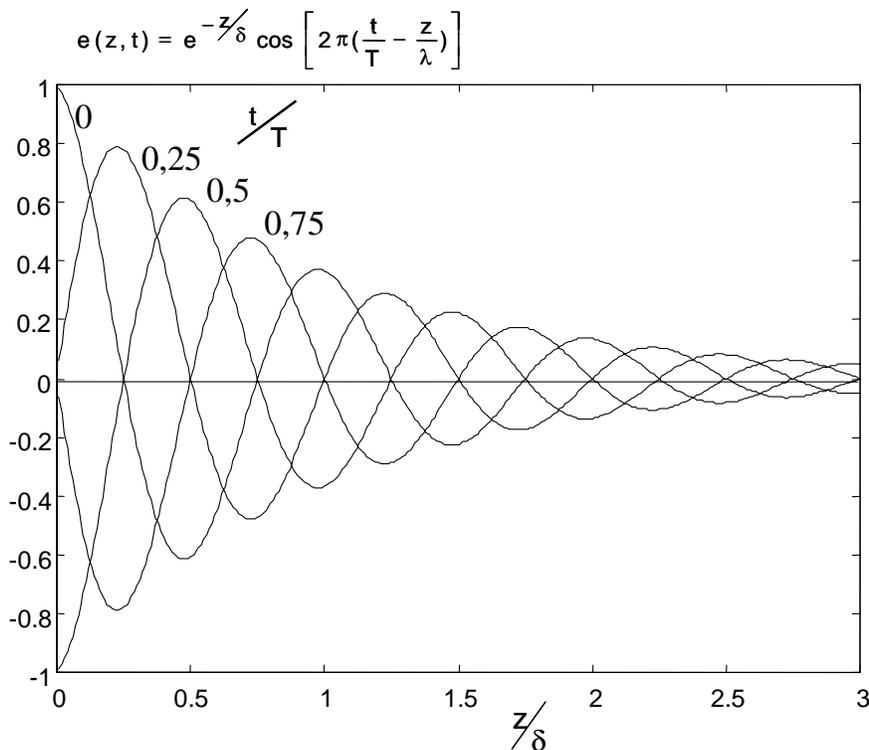


Figura 4.8 – Distribuição do campo elétrico em uma onda que penetra em um meio dissipativo em quatro instantes de tempo. A origem $z=0$ corresponde à superfície de entrada no meio. A amplitude do campo nesta posição é unitária. δ é a profundidade de penetração.

Exemplo 4.2 – Vamos calcular os parâmetros de propagação para uma onda eletromagnética na água salgada em três frequências: 1KHz, 1MHz e 100MHz e comparar com os valores correspondentes para o vácuo. Consideraremos $\sigma = 1\text{S/m}$, $\varepsilon_r = 81$ e $\mu_r = 1$, independentemente da frequência. O cálculo de

cada parâmetro é uma aplicação direta das fórmulas desenvolvidas nas duas últimas seções. A Tabela 4.5 mostra os resultados obtidos. As principais diferenças que se observa são:

- 1) No vácuo, a constante de atenuação é nula em qualquer freqüência. Na água salgada, α é não nula e aumenta com a freqüência.*
- 2) A velocidade de fase no vácuo é independente da freqüência. Na água salgada a velocidade de fase é muito menor que no vácuo, mas aumenta com a freqüência.*
- 3) A impedância do vácuo é real e independente da freqüência. A impedância da água é complexa, muito baixa em relação ao vácuo mas aumenta com a freqüência.*
- 4) O comprimento de onda na água é bem menor que no vácuo para as freqüências analisadas.*
- 5) No vácuo, a onda percorre qualquer distância sem atenuação. Na água, a profundidade de penetração é finita e diminui com o aumento da freqüência. A profundidade $\delta_{1\%}$ é a distância percorrida pela onda até a posição onde sua amplitude é 1% do valor na superfície onde supostamente foi definida a origem de posição.*

Energia Transportada pela Onda Eletromagnética

Vimos no Capítulo 3 que a energia fornecida pelas fontes na criação de distribuições de carga, correntes e campos associados é armazenada no espaço com densidade dependente do quadrado da amplitude dos campos. Por outro lado, no Apêndice 4.2 vemos que a energia é transportada em um sistema eletromagnético como um fluxo de potência com uma densidade superficial dada pelo vetor de Poynting. Em uma onda eletromagnética, o fluxo de potência ocorre na direção e sentido de propagação da onda. Podemos dizer então que a intensidade da onda, ou seja, a potência transportada por unidade de área na frente de onda, é dada por:

$$(4.130) \quad \vec{s} = \vec{e} \times \vec{h}$$

Além disso, o teorema de Poynting estabelece uma relação entre a taxa de variação da densidade de energia armazenada $w = w_e + w_m$, a densidade de potência dissipada p_{diss} e o divergente do vetor de Poynting que pode ser escrita na forma (Figura 4.9):

$$(4.131) \quad \nabla \cdot \vec{s} = -p_{\text{diss}} - \frac{\partial w}{\partial t}$$

onde:

$$(4.132) \quad w_e = \int_0^d \vec{e} \cdot \delta \vec{d} = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{e}|^2$$

$$(4.133) \quad w_m = \int_0^b \vec{h} \cdot \delta \vec{b} = \frac{1}{2} \mu |\vec{h}|^2$$

$$(4.134) \quad p_{\text{diss}} = \vec{j} \cdot \vec{e} = \sigma |\vec{e}|^2$$

Nestas três últimas equações, os termos após a primeira igualdade são as expressões gerais e os termos após a segunda igualdade são as expressões válidas para materiais lineares. Contudo, as equações (4.130) a (4.134) são relações instantâneas e freqüentemente estamos mais interessados nos valores médios da potência transportada, dissipada e armazenada. Isso ocorre porque, em altas freqüências, a medição de valores instantâneos de energia ou potência é difícil e de pouco valor prático, já que os efeitos da absorção de energia eletromagnética pelos materiais (como aumento da temperatura, aceleração de reações químicas, etc.) são processos muito mais lentos e que respondem ao valor médio da potência absorvida.

O valor médio do vetor de Poynting é calculado a seguir. Como os campos \vec{e} e \vec{h} são periódicos, podemos calcular os valores médios no intervalo de tempo correspondente a um período T . Usando as equações (4.92) e (4.93) para os campos da onda plana, obtemos o vetor de Poynting médio $\langle \vec{s} \rangle$ pela expressão:

$$(4.135) \quad \langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{e} \times \vec{h} dt = e_0 h_0 e^{-2\alpha z} \hat{z} \int_0^T \cos(\omega t - \beta z + \theta_{e_0}) \cos(\omega t - \beta z + \theta_{h_0}) dt$$

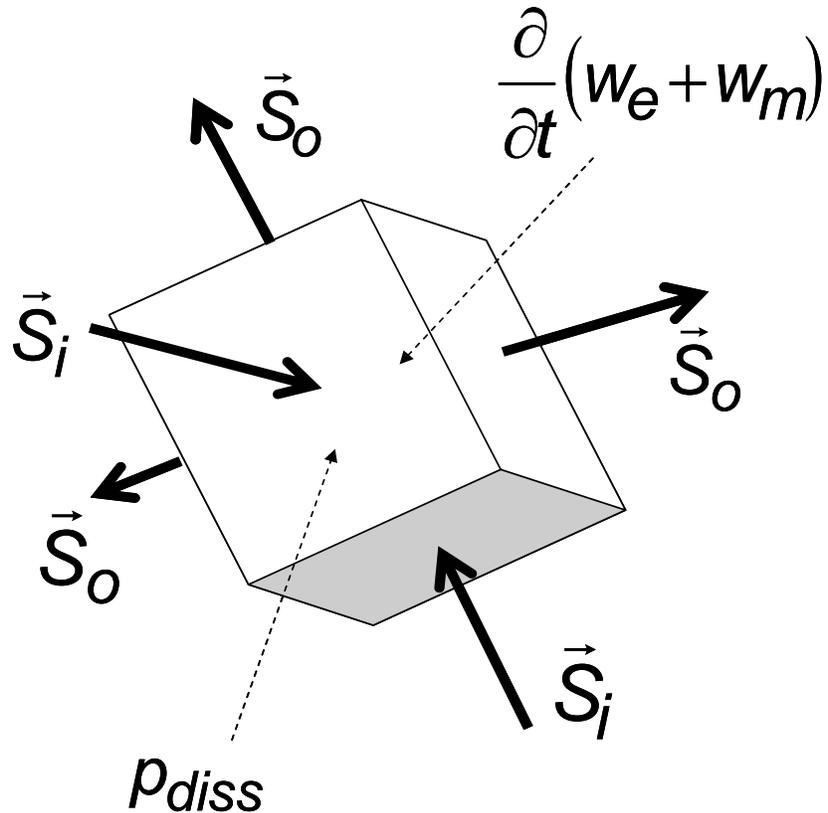


Figura 4.9 – Representação do teorema de Poynting. A potência \vec{S}_i por unidade de área flui para dentro do volume. A potência \vec{S}_o flui para fora do volume. A diferença entre os fluxos de potência corresponde à potência dissipada mais a taxa de variação da energia eletromagnética armazenada no volume.

Usando a identidade trigonométrica: $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$, podemos reescrever (4.135) na forma:

$$(4.136) \quad \langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{2T} e_o h_o e^{-2\alpha z} \hat{z} \left[\int_0^T \cos(2\omega t - 2\beta z + \theta_{e_o} + \theta_{h_o}) dt + \int_0^T \cos(\theta_{e_o} - \theta_{h_o}) dt \right]$$

A primeira integral é nula e a segunda é igual a $T \cos \phi$. Assim, obtemos o vetor de Poynting médio na forma:

$$(4.137) \quad \langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} e_o h_o e^{-2\alpha z} \cos \phi \hat{z}$$

O vetor de Poynting médio expressa o valor médio temporal da densidade superficial de potência transportada pela onda através de uma frente de onda na direção e sentido de propagação. Calculemos agora a densidade média temporal de energia armazenada nos campos elétrico e magnético da onda. Para a energia elétrica, usando a equação (4.92) para o campo, temos:

$$(4.138) \quad \langle w_e \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \varepsilon e^2 dt = \frac{\varepsilon e_0^2}{2T} e^{-2\alpha z} \int_0^T \cos^2(\omega t - \beta z + \theta_{e0}) dt$$

Usando a identidade trigonométrica $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a$, e reconhecendo que a integral no período T de $\cos(2\omega t + \xi)$ é nula para qualquer ξ constante, obtemos a densidade média temporal de energia elétrica na forma:

$$(4.139) \quad \langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon e_0^2 e^{-2\alpha z}$$

de modo análogo pode-se mostrar que a densidade média temporal de energia magnética numa onda monocromática é dada por:

$$(4.140) \quad \langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \mu h_0^2 e^{-2\alpha z}$$

Tabela 4.3 – Características das ondas planas em meios ilimitados

	geral	meio não dissipativo
Forma fasorial dos campos	$\vec{E} = e_0 e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z - \theta_{e0})} \hat{x}$ $\vec{H} = h_0 e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z - \theta_{h0})} \hat{y}$	$\vec{E} = e_0 e^{-j\beta z} \hat{x}$ $\vec{H} = h_0 e^{-j\beta z} \hat{y}$
Forma temporal dos campos	$\vec{e} = e_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_{e0}) \hat{x}$ $\vec{h} = h_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_{h0}) \hat{y}$	$\vec{e} = e_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{x}$ $\vec{h} = h_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{y}$
Impedância característica	$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$	$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$
Constante de propagação	$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$	$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

Constante de atenuação	$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\epsilon^2} - \omega\epsilon}$	$\alpha = 0$
Constante de fase	$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\epsilon^2}}{\omega\epsilon} - 1 \right)}$	$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$
Velocidade de fase	$v = \frac{\omega}{\beta}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{n}$
Comprimento de onda	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$	$\lambda = \frac{c}{nf}$

Tabela 4.4 – dependência das características de propagação com a frequência

	geral	$\sigma \ll \omega\epsilon$	$\sigma \gg \omega\epsilon$
Constante de atenuação	$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\epsilon^2} - \omega\epsilon}$	$\alpha \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\alpha \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
Constante de fase	$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\epsilon^2}}{\omega\epsilon} - 1 \right)}$	$\beta \cong \omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\beta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
Velocidade de fase	$v = \frac{c/n}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\epsilon^2}}{\omega\epsilon} - 1 \right)}}$	$v \cong \frac{c}{n}$	$v \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$
Impedância característica	$Z_o = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = R_o + jX_o$	$R_o \cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ $X_o \cong \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$R_o \cong \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$ $X_o \cong \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$
Profundidade de penetração	$\delta = \frac{1}{\alpha}$	$\delta \cong \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$	$\delta \cong \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$

Finalmente devemos obter a potência média dissipada por unidade de volume:

$$(4.141) \quad \langle p_{\text{diss}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma e^2 dt = \frac{1}{2} \sigma e_0^2 e^{-2\alpha z}$$

O teorema de conservação de energia expresso em (4.131) evidentemente não se aplica aos valores médios da energia e potências calculadas acima. A fim de obter uma descrição equivalente ao teorema de Poynting válida para os valores médios, devemos fazer um desenvolvimento semelhante ao que foi feito no Apêndice 4.2 para o teorema de Poynting, mas agora usando as equações fasoriais de Maxwell. Iniciamos com a lei de Faraday e com o conjugado complexo da equação da lei de Ampere:

$$(4.142) \quad \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$$

$$(4.143) \quad \nabla \times \vec{H}^* = (\sigma - j\omega\epsilon) \vec{E}^*$$

Agora, multiplicamos escalarmente (4.142) por \vec{H}^* e (4.143) por $-\vec{E}$, obtendo:

$$(4.144) \quad (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H}^* = -j\omega\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* = -j\omega\mu |\vec{H}|^2$$

$$(4.145) \quad -(\nabla \times \vec{H}^*) \cdot \vec{E} = -(\sigma - j\omega\epsilon) \vec{E}^* \cdot \vec{E} = -(\sigma - j\omega\epsilon) |\vec{E}|^2$$

onde $|\vec{H}| = h_0 e^{-\alpha z}$ e $|\vec{E}| = e_0 e^{-\alpha z}$. Somamos (4.144) e (4.145) para obter:

$$(4.146) \quad (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H}^* - (\nabla \times \vec{H}^*) \cdot \vec{E} = -\sigma |\vec{E}|^2 + j\omega\epsilon |\vec{E}|^2 - j\omega\mu |\vec{H}|^2$$

Usando agora a identidade vetorial $\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{f}$, podemos reescrever esta equação na forma:

$$(4.147) \quad \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = -\sigma |\vec{E}|^2 - j2\omega \left(\frac{1}{2} \mu |\vec{H}|^2 - \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 \right)$$

Multiplicando ambos os termos por $\frac{1}{2}$, e definindo o vetor de Poynting complexo pela expressão:

$$(4.148) \quad \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$$

Tabela 4.5 – Comparação entre as características de propagação no vácuo e na água salgada $\sigma = 1\text{ S/m}$, $\epsilon_r = 81$ e $\mu_r = 1$.

Propriedade	1KHz		1MHz		100MHz	
	vácuo	água	vácuo	água	vácuo	água
α (Np/m)	0	0,0628	0	1,98	0	15,97
β (rad/m)	$2,096 \times 10^{-5}$	0,0628	0,021	1,99	2,096	24,71
v (m/s)	3×10^8	1×10^5	3×10^8	$3,16 \times 10^6$	3×10^8	$2,54 \times 10^7$
λ (m)	3×10^5	100	300	3,16	3	0,254
δ (m)	∞	15,9	∞	0,50	∞	0,063
$\delta_{1\%}$ (m)	∞	73,3	∞	2,32	∞	0,288
R_o (Ω)	376,8	0,0628	376,8	1,99	376,8	22,53
X_o (Ω)	0	0,0628	0	1,98	0	14,56
$ Z_o $ (Ω)	376,8	0,0889	376,8	2,81	376,8	26,83
ϕ (rad)	0	0,785	0	0,783	0	0,574
ϕ ($^\circ$)	0	45	0	44,87	0	32,88

Obtemos a equação equivalente do teorema de Poynting na forma fasorial envolvendo os valores médios da energia e das potências:

$$(4.149) \quad \nabla \cdot \vec{\bar{S}} = -\langle p_{\text{diss}} \rangle - j2\omega (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle)$$

Esta equação é equivalente a (4.131). Contudo, existem conceitos novos em (4.149), os quais não foram ainda devidamente explorados. O vetor de Poynting complexo, por exemplo, é uma quantidade complexa, ou seja, tem parte real e parte imaginária. Em (4.149) podemos, então, substituir $\vec{\bar{S}} = \vec{\bar{S}}_a + j\vec{\bar{S}}_r$. De acordo com (4.149), as partes real ($\vec{\bar{S}}_a$) e imaginária ($\vec{\bar{S}}_r$) do vetor de Poynting complexo estão associadas aos termos do lado direito por meio das equações:

$$(4.150) \quad \nabla \cdot \vec{\bar{S}}_a = -\langle p_{\text{diss}} \rangle$$

$$(4.151) \quad \nabla \cdot \vec{\bar{S}}_r = -2\omega (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle)$$

Vemos então que $\vec{\bar{S}}_a$ está associado a dissipação de potência no espaço. Este termo, então, representa a densidade de fluxo de potência ativa transportada pela onda. A equação (4.150) nos mostra que se o meio é dissipativo, a onda perde

potência ativa na forma de trabalho realizado sobre as partículas móveis carregadas, o que implica em aquecimento do material e outros possíveis efeitos. Por outro lado, \bar{S}_r está associado à energia média armazenada no meio. Os termos que aparecem no lado direito de (4.151) têm unidade de densidade volumétrica de potência. Definimos a densidade de potência reativa pela expressão:

$$(4.152) \quad p_r = 2\omega (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle)$$

A potência reativa é o valor médio da taxa de variação da energia armazenada no meio. Ela tem duas contribuições, a potência reativa elétrica e a potência reativa magnética, cujas densidades volumétricas são dadas por:

$$(4.153) \quad p_{re} = -2\omega \langle w_e \rangle$$

$$(4.154) \quad p_{rm} = 2\omega \langle w_m \rangle$$

A potência reativa pode ser negativa, se prevalece a energia elétrica, pode ser positiva, se prevalece a energia magnética, ou pode ser nula, se ambas são iguais. A condição de potência reativa nula sempre ocorre para ondas planas se propagando em meios sem perdas, pois nesse caso $\langle w_m \rangle = \langle w_e \rangle$, como se pode deduzir facilmente substituindo-se (4.105) em (4.139) e (4.140).

Finalmente, podemos demonstrar que a parte real do vetor de Poynting complexo é igual ao valor médio temporal do vetor de Poynting no domínio do tempo. Esta verificação é facilmente obtida, substituindo-se os fasores de campo dados por (4.90) e (4.91) em (4.148):

$$(4.155) \quad \begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{2} e_0 e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z - \theta_{e0})} \hat{x} \times \left[h_0 e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z - \theta_{h0})} \hat{y} \right]^* \\ &= \frac{1}{2} e_0 h_0 e^{-2\alpha z} e^{j(\theta_{e0} - \theta_{h0})} (\hat{x} \times \hat{y}) = \frac{1}{2} e_0 h_0 e^{-2\alpha z} e^{j\phi} \hat{z} \end{aligned}$$

As partes real e imaginária do vetor de Poynting complexo são, então:

$$(4.156) \quad \bar{S}_a = \frac{1}{2} e_0 h_0 e^{-2\alpha z} \cos \phi \hat{z}$$

$$(4.157) \quad \bar{S}_r = \frac{1}{2} e_0 h_0 e^{-2\alpha z} \sin \phi \hat{z}$$

Então, o teorema de Poynting para ondas monocromáticas no domínio da frequência pode ser expresso pelas seguintes leis de conservação:

$$(4.158) \quad \nabla \cdot \vec{S} = -p = -\langle p_{diss} \rangle - j 2\omega (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle)$$

$$(4.159) \quad \nabla \cdot \vec{S}_a = -p_a = -\langle p_{diss} \rangle$$

$$(4.160) \quad \nabla \cdot \vec{S}_r = -p_r = -2\omega (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle)$$

onde $p = p_a + j p_r$ é a densidade volumétrica de potência média total, que tem como parte real, a densidade de potência ativa (potência dissipada) e como parte imaginária a densidade de potência reativa (variação no tempo da energia armazenada). As expressões acima se referem a meios passivos, ou seja, onde não existem fontes. Se o volume analisado contém fontes de energia eletromagnética, então as parcelas correspondentes de potência devem ser adicionadas aos segundos termos nessas equações, ou seja:

$$(4.161) \quad \nabla \cdot \vec{S} = p_s - p$$

$$(4.162) \quad \nabla \cdot \vec{S}_a = p_{sa} - p_a$$

$$(4.163) \quad \nabla \cdot \vec{S}_r = p_{sr} - p_r$$

onde $p_s = p_{sa} + j p_{sr}$ é a densidade de potência fornecida pelas fontes. A Tabela 4.6 resume as relações de energia estudadas nesta seção. Observe que em um meio não dissipativo, tanto a densidade de potência ativa quanto reativa são nulas (pois $\sigma = 0$ e $\langle w_m \rangle = \langle w_e \rangle$) e, portanto, o teorema de Poynting resulta em $\nabla \cdot \vec{S} = 0$.

Tabela 4.6 – Relações de energia para a onda eletromagnética

Teorema de Poynting no domínio do tempo	$\nabla \cdot \vec{S} = -p_d - \frac{\partial w}{\partial t}$
Vetor de Poynting médio	$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} e_0 h_0 e^{-2\alpha z} \cos \phi \hat{z}$
Densidade média de energia elétrica	$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \epsilon e_0^2 e^{-2\alpha z}$
Densidade média de energia magnética	$\langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \mu h_0^2 e^{-2\alpha z}$

Densidade média de potência dissipada	$\langle p_{\text{diss}} \rangle = \frac{1}{2} \sigma e_0^2 e^{-2\alpha z}$
Vetor de Poynting Complexo	$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \vec{S}_a + j\vec{S}_r$
Teorema de Poynting fasorial	$\nabla \cdot \vec{S} = -\langle p_{\text{diss}} \rangle - j2\omega (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle)$
Densidade de Potência ativa	$p_a = \langle p_{\text{diss}} \rangle = \frac{1}{2} \sigma e_0^2 e^{-2\alpha z}$
Densidade de Potência reativa	$p_r = p_{re} + p_{rm}$ $p_{re} = -2\omega \langle w_e \rangle$ $p_{rm} = 2\omega \langle w_m \rangle$
Densidade de Potência total	$p = p_a + jp_r$
Princípio de conservação de energia eletromagnética	$\nabla \cdot \vec{S} = p_s - p$ $\nabla \cdot \vec{S}_a = p_{sa} - p_a$ $\nabla \cdot \vec{S}_r = p_{sr} - p_r$

Exemplo 4.3 – A amplitude do campo elétrico na superfície plana de um volume condutor semi-infinito foi medida como sendo 1 V/m e sua freqüência era 30 MHz. Vamos calcular a potência total ativa e reativa absorvida pelo material por unidade de área da superfície plana. Consideraremos que o meio tem os seguintes valores das constantes eletromagnéticas: $\sigma = 1 \times 10^7$ S/m, $\epsilon_r = 1$ e $\mu_r = 1$. Uma vez que $\sigma \gg \omega \epsilon$ podemos aplicar a aproximação para bons condutores:

$$(Ex.7) \quad \alpha \cong \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \approx 34.414 \text{ Np/m}$$

$$(Ex.8) \quad |Z_0| \cong \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} \approx 4,87 \times 10^{-3} \Omega$$

$$(4.125) \quad \phi \cong \frac{\pi}{4}$$

A amplitude do campo magnético na superfície é:

$$(Ex.9) \quad h_0 = \frac{e_0}{|Z_0|} \approx 205 \text{ A/m}$$

A potência ativa por unidade de área é dada pela integral da densidade de potência $p_a = \langle p_{diss} \rangle = \frac{1}{2} \sigma e_0^2 e^{-2\alpha z}$ em um volume no qual a área da superfície é unitária e o comprimento é infinito na direção z . o elemento de volume neste caso é $dv = dz$. temos então:

$$(Ex.10) \quad \frac{P_a}{1 m^2} = \int_0^{\infty} \langle p_{diss} \rangle dz = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \sigma e_0^2 e^{-2\alpha z} dz = \frac{1}{4} \frac{\sigma e_0^2}{\alpha} \approx 72,6 W / m^2$$

De modo análogo vamos calcular potência reativa por unidade de área pela integral da densidade de potência $p_r = 2\omega (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle)$ no volume de área unitária.

(Ex.11)

$$\begin{aligned} \frac{P_r}{1 m^2} &= 2\omega \int_0^{\infty} \langle w_m \rangle dz - 2\omega \int_0^{\infty} \langle w_e \rangle dz = 2\omega \int_0^{\infty} \frac{1}{4} \mu h_0^2 e^{-2\alpha z} dz - 2\omega \int_0^{\infty} \frac{1}{4} \varepsilon e_0^2 e^{-2\alpha z} dz \\ &= \frac{\omega}{4\alpha} (\mu h_0^2 - \varepsilon e_0^2) \approx 72,3 W / m^2 \end{aligned}$$

Evidentemente, não é por coincidência que as potências ativa e reativa no meio sejam praticamente iguais. Acontece que o fluxo de potência para o interior do volume condutor tem partes real e imaginária praticamente iguais, em virtude do ângulo polar da impedância característica do meio ser aproximadamente 45° . Poderíamos ter obtido os mesmos resultados simplesmente calculando as componentes real e imaginária do vetor de Poynting complexo na superfície. De acordo com (4.156) e (4.157), obteríamos:

$$(Ex.12) \quad \bar{S}_a(z=0) = \frac{1}{2} e_0 h_0 \cos \phi \hat{z} \approx 72,5 W / m^2 \hat{z}$$

$$(Ex.13) \quad \bar{S}_r(z=0) = \frac{1}{2} e_0 h_0 \sin \phi \hat{z} \approx 72,5 W / m^2 \hat{z}$$

Os valores não coincidem exatamente com os calculados anteriormente em virtude das aproximações no cálculo de h_0 e ϕ . Estes resultados ilustram muito bem o princípio de conservação de energia expresso no teorema de Poynting. A potência ativa dissipada no volume é exatamente a mesma potência que está

fluindo para dentro do volume através de sua superfície. O mesmo acontece com a potência reativa.

Exemplo 4.4 – A Figura 4.10 mostra uma fonte submersa no mar a uma profundidade R que está irradiando isotropicamente com potência ativa P_{sa} na frequência f_0 . Vamos calcular a intensidade do sinal na superfície. Neste caso, a frente de onda não é plana, e sim esférica. A potência gerada se espalha através de uma superfície esférica centrada na fonte com densidade uniforme. Se o meio fosse não dissipativo, o vetor de Poynting teria apenas parte real e seu módulo seria dado por:

$$(Ex. 14) \quad |\vec{S}_a| = \frac{P_{sa}}{4\pi r^2}$$

Então, desconsiderando inicialmente a dissipação de potência na água, podemos utilizar (4.156) com $\alpha = 0$ para calcular a intensidade do campo elétrico gerado:

$$(Ex. 15) \quad |\vec{S}_a| = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{|Z_0|} \cos \phi = \frac{P_{sa}}{4\pi r^2} \quad \rightarrow \quad e_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{|Z_0| P_{sa}}{2\pi \cos \phi}}$$

Ou seja, devido ao espalhamento da energia, o campo elétrico tende a diminuir com o inverso da distância até a fonte. Contudo, como a onda se propaga em um meio condutor, os campos sofrem uma atenuação adicional devido à dissipação de potência. A densidade de potência dissipada é dada por (4.141). Assim, temos:

$$(Ex. 16) \quad \langle p_{diss} \rangle = \frac{1}{2} \sigma e_0^2 e^{-2\alpha r} = \frac{\sigma |Z_0|}{4\pi \cos \phi} P_{sa} \frac{e^{-2\alpha r}}{r^2}$$

A intensidade do sinal irradiado na superfície se relaciona com a potência gerada pela fonte P_{sa} e com a potência dissipada no volume esférico correspondente à profundidade R , através do teorema de Poynting. Em virtude do teorema de Gauss, o fluxo de potência ativa para fora da superfície esférica de raio R centrada na fonte pode ser calculado por:

$$(Ex. 17) \quad \oiint_S \vec{S}_a \cdot \hat{n} \, ds = \iiint_V \nabla \cdot \vec{S}_a \, dv$$

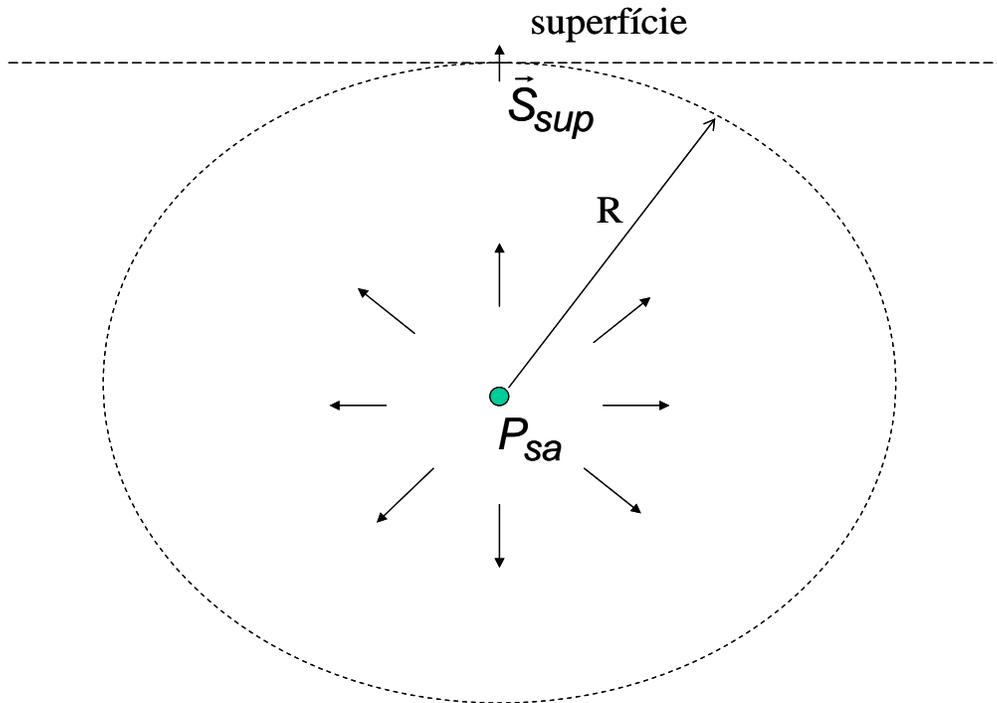


Figura 4.10 – Uma fonte submersa irradia isotropicamente a potência P_{sa} . No exemplo 4.4 calcula-se a intensidade do sinal que alcança a superfície. A intensidade é calculada imediatamente abaixo da superfície.

Substituindo $\nabla \cdot \vec{S}_a$ de acordo com (4.162), obtemos:

$$(Ex.18) \quad \oiint_S \vec{S}_a \cdot \hat{n} \, ds = \iiint_V p_{sa} \, dv - \iiint_V \langle p_{diss} \rangle \, dv$$

Mas, supondo que a irradiação é isotrópica, o vetor de Poynting é radial e uniforme na superfície esférica. Assim, temos:

$$(Ex.19) \quad \oiint_S \vec{S}_a \cdot \hat{n} \, ds = 4\pi R^2 S_a$$

A primeira integral no lado direito de (Ex.18) é simplesmente a potência total fornecida pela fonte, P_{sa} . A segunda integral pode ser calculada, substituindo-se (Ex.16) e usando o elemento de volume $dv = 4\pi r^2 dr$. Assim fazendo, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \text{(Ex.20)} \quad \iiint_V \langle p_{diss} \rangle dv &= \int_0^R \langle p_{diss} \rangle 4\pi r^2 dr = \frac{\sigma |Z_0|}{\cos \phi} P_{sa} \int_0^R e^{-2\alpha r} dr \\
 &= \frac{\sigma |Z_0|}{2\alpha \cos \phi} P_{sa} (1 - e^{-2\alpha R})
 \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que o coeficiente $\frac{\sigma |Z_0|}{2\alpha \cos \phi}$ nesta equação é identicamente

unitário. Assim, temos:

$$\text{(Ex.21)} \quad \iiint_V \langle p_{diss} \rangle dv = P_{sa} (1 - e^{-2\alpha R})$$

Levando os resultados anteriores na equação (Ex.18), obtemos:

$$\text{(Ex.22)} \quad 4\pi R^2 S_a = P_{sa} e^{-2\alpha R}$$

ou seja, a intensidade do sinal na superfície é dada por:

$$\text{(Ex.23)} \quad S_{sup} = \frac{P_{sa}}{4\pi R^2} e^{-2\alpha R}$$

Para a água do mar, $\sigma \approx 4 \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 81$. Com estes valores, em 1MHz por exemplo, temos $\alpha \approx 4 \text{ Np/m}$. Para uma fonte submersa a 10 m de profundidade gerando 1KW de potência, a densidade de potência na superfície é ínfima, significando que toda a potência gerada pela fonte é dissipada na água. A fim de obter alguma intensidade perceptível na superfície, é necessário usar frequências bem mais baixas. Por exemplo, em 1KHz o coeficiente de Atenuação é $\sim 0.126 \text{ Np/m}$ e a intensidade dada por (Ex.23) é $\sim 64 \text{ mW/m}^2$. Neste cálculo consideramos que a onda se propaga como uma onda transversal isotrópica mesmo nas proximidades da fonte. Estas são condições que não ocorrem com irradiadores reais. Mesmo assim, o exemplo é uma boa ilustração do princípio de conservação de energia expresso no teorema de Poynting.

Polarização da onda eletromagnética

Polarização de uma onda eletromagnética é um termo usado para definir a orientação espacial dos vetores de campo. Uma onda plana, como se sabe, tem seus vetores localizados sempre em planos perpendiculares à direção de

propagação, chamados de frentes de onda. Mas, a direção dos vetores de campo na frente de onda não é única e, assim, existem algumas possibilidades de polarização diferentes, conforme mostra a Figura 4.11. A polarização de uma onda eletromagnética é especificada pela direção de seu vetor de campo elétrico. Quando os campos estão orientados todo o tempo em uma única direção, chamamos de polarização linear. Em virtude das referências usuais com as direções vertical e horizontal em sistemas de transmissão por ondas de rádio, é muito comum encontrarmos as especificações de onda com polarização vertical, quando o campo elétrico está sempre orientado na direção vertical ou, onda com polarização horizontal, se o campo elétrico está orientado sempre na direção horizontal. Ambos os casos referem-se à polarização linear. Quando os vetores de campo mudam ciclicamente de direção na frente de onda, temos o caso geral de polarização elíptica. Um caso particular muito importante da polarização elíptica é a polarização circular, no qual o vetor de campo elétrico tem sempre o mesmo módulo, mas sua direção gira com velocidade angular igual à frequência angular da onda e com sentido horário ou anti-horário no plano da frente de onda.

Um caso geral de polarização linear é descrito quando duas ondas de mesma frequência e mesma fase se superpõem em quadratura, ou seja, seus vetores de campo elétrico são perpendiculares entre si. Sejam então, as duas ondas se propagando na direção z , descritas por seus vetores de campo elétrico na forma:

$$(4.164) \quad \vec{e}_x = e_{x0} \cos(\omega t - \beta z) \hat{x}$$

$$(4.165) \quad \vec{e}_y = e_{y0} \cos(\omega t - \beta z) \hat{y}$$

A onda resultante é então descrita por:

$$(4.166) \quad \vec{e} = (e_{x0} \hat{x} + e_{y0} \hat{y}) \cos(\omega t - \beta z)$$

O vetor campo elétrico está orientado sempre na direção que faz um ângulo θ com o eixo x , dado por:

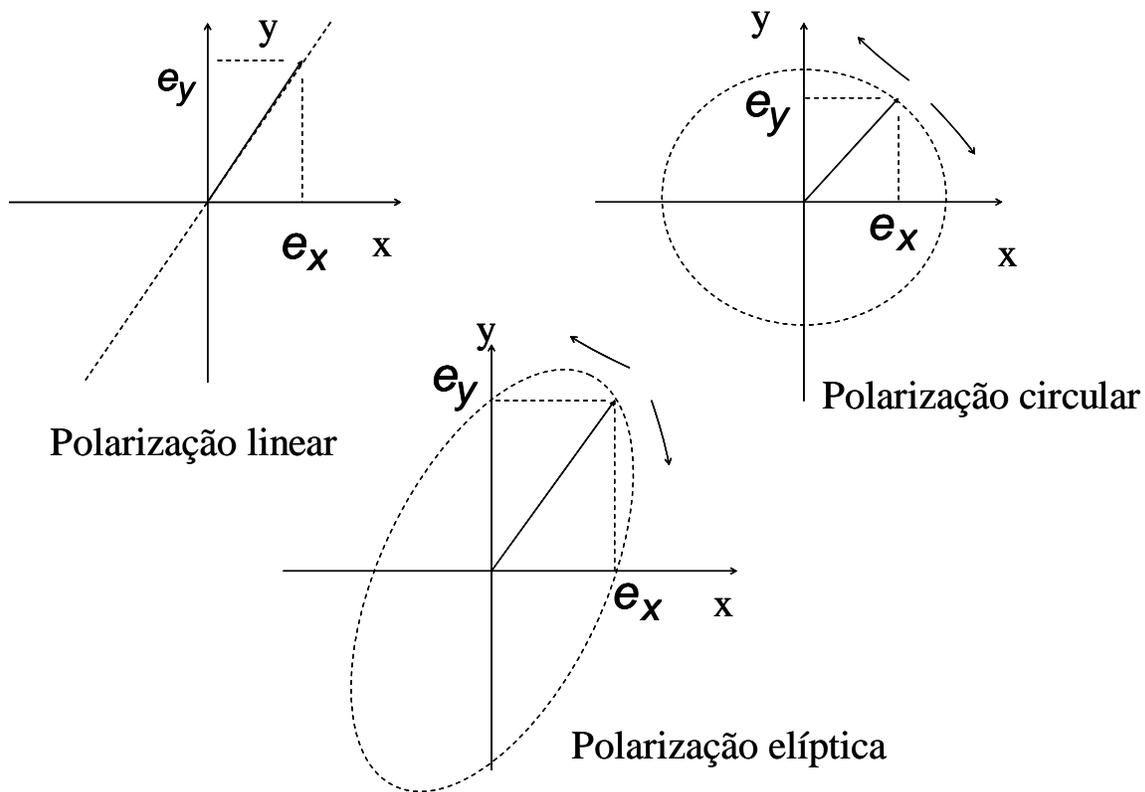


Figura 4.11 – Tipos de polarização da onda eletromagnética.

$$(4.167) \quad \theta = \arctg\left(\frac{e_{y0}}{e_{x0}}\right)$$

Se as ondas que se superpõem em quadratura estiverem defasadas, o vetor resultante não terá uma direção única e a polarização não será mais linear. No caso geral a polarização será elíptica. Podemos descrever a trajetória do vetor campo elétrico pelo lugar geométrico da sua extremidade em relação à origem em um sistema de coordenadas no plano da frente de onda. Considerando que o campo na direção y está adiantado δ radianos em relação ao campo na direção x , temos:

$$(4.168) \quad \vec{e}_y = e_{y0} \cos(\omega t - \beta z + \delta) \hat{y}$$

Expandindo a função monocromática usando uma identidade trigonométrica, teremos:

$$(4.169) \quad \frac{e_y}{e_{y0}} = \cos(\omega t - \beta z) \cos \delta - \sin(\omega t - \beta z) \sin \delta$$

Podemos escrever $\cos(\omega t - \beta z)$ e $\sin(\omega t - \beta z)$ como funções do campo na direção x:

$$(4.170) \quad \begin{aligned} \cos(\omega t - \beta z) &= \frac{e_x}{e_{x0}} \\ \sin(\omega t - \beta z) &= \sqrt{1 - \frac{e_x^2}{e_{x0}^2}} \end{aligned}$$

Substituindo essas relações em (4.169) e manipulando algebricamente a fim de eliminar o radical que aparece em (4.170), obtemos:

$$(4.171) \quad a e_x^2 + b e_y^2 - c e_x e_y = 1$$

Onde os coeficientes a, b e c são dados por:

$$(4.172) \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{e_{x0}^2 \sin^2 \delta} \\ b &= \frac{1}{e_{y0}^2 \sin^2 \delta} \\ c &= \frac{2 \cos \delta}{e_{x0} e_{y0} \sin^2 \delta} \end{aligned}$$

A equação (4.171) é uma representação geral de uma elipse no plano dos vetores ortogonais \vec{e}_x e \vec{e}_y . No caso específico em que $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ temos: $a = \frac{1}{e_{x0}^2}$, $b = \frac{1}{e_{y0}^2}$

e $c = 0$. Nesse caso, a equação (4.171) pode ser escrita na seguinte forma:

$$(4.173) \quad \frac{e_x^2}{e_{x0}^2} + \frac{e_y^2}{e_{y0}^2} = 1$$

Que é uma elipse com seus eixos coincidindo com as direções x e y. Se $e_{x0} > e_{y0}$, o eixo maior da elipse será $2e_{x0}$ e estará orientado na direção x, enquanto o eixo menor será $2e_{y0}$ e estará orientado na direção y. Se $e_{x0} = e_{y0}$, os dois eixos serão iguais e teremos o caso particular da polarização circular. O sinal do ângulo de defasagem determina o sentido de rotação do vetor campo

elétrico total da onda (Figura 4.12). Para $\delta > 0$ o campo gira no sentido horário (polarização circular esquerda) para um observador que vê a frente de onda se aproximar. Para $\delta < 0$ o campo gira no sentido anti-horário (polarização circular direita).

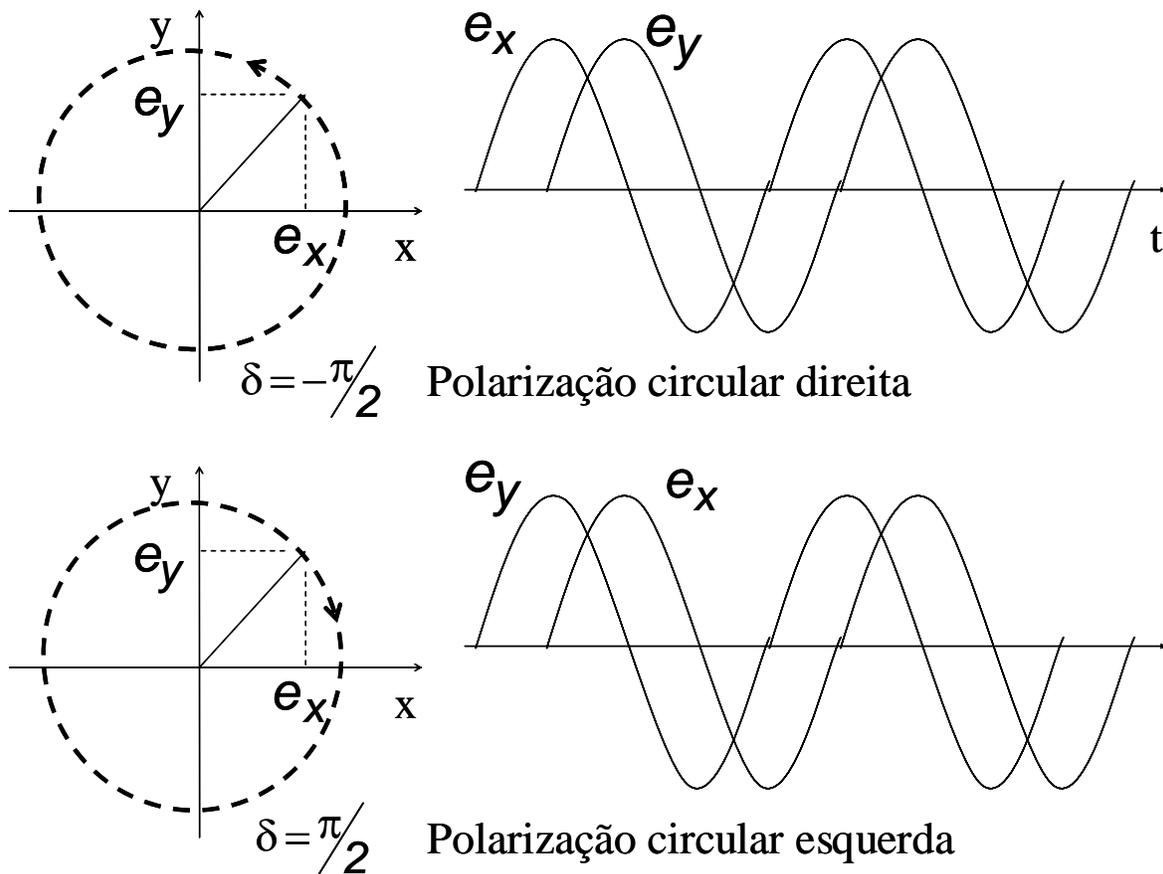


Figura 4.12 – Campos de mesma amplitude e defasados de $\pm 90^\circ$ resultam na polarização circular.

Se a defasagem entre os campos ortogonais é diferente de $\pm 90^\circ$, a elipse terá seus eixos não coincidindo com as direções dos campos \vec{e}_x e \vec{e}_y . Alguns exemplos são dados na Figura 4.13.

Exemplo 4.5 – A intensidade de uma onda polarizada circularmente é o dobro da intensidade de uma onda polarizada linearmente de mesma amplitude. Vejamos porque. Nos dois casos, o campo elétrico pode ser descrito como sendo o

resultado da superposição dos campos ortogonais de duas ondas planas. A intensidade da onda resultante é igual a soma das intensidades das componentes.

Em um meio não dissipativo, temos:

$$(Ex.24) \quad \langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \frac{e_{x0}^2}{|Z_0|} + \frac{1}{2} \frac{e_{y0}^2}{|Z_0|}$$

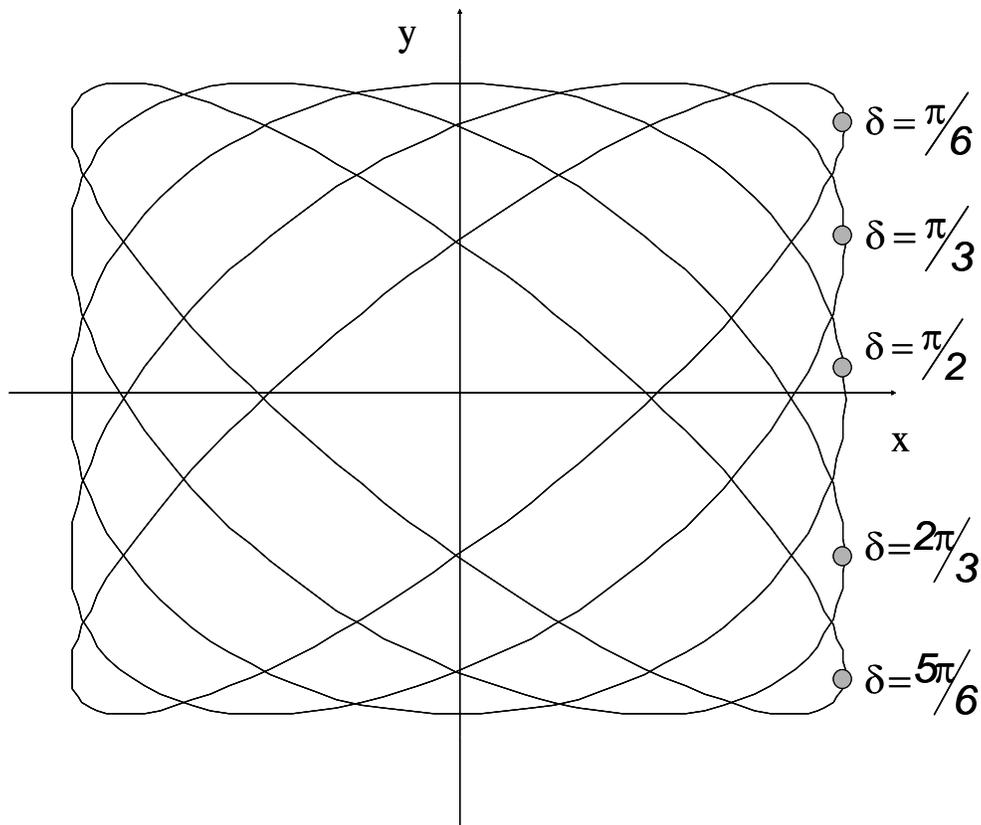


Figura 4.13 – Casos de polarização elíptica com campos de mesma amplitude.

Para uma onda circularmente polarizada, $e_{x0} = e_{y0} = e_0$, onde e_0 é o módulo do campo elétrico resultante. Assim, a intensidade da onda circularmente polarizada é dada por:

$$(Ex.25) \quad \langle \vec{s} \rangle = \frac{e_0^2}{|Z_0|}$$

Contudo, para uma onda linearmente polarizada, temos $e_o^2 = e_{x0}^2 + e_{y0}^2$, onde e_o é a amplitude do campo resultante. Levando isso em (Ex.24), obtemos:

$$(Ex.26) \quad \langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \frac{e_{x0}^2 + e_{y0}^2}{|Z_o|} = \frac{1}{2} \frac{e_o^2}{|Z_o|}$$

Essa diferença surge do fato do campo elétrico resultante na onda circularmente polarizada não variar em módulo, mas apenas em direção e sentido. Com isso a potência instantânea irradiada é constante. No caso de polarização linear, o campo elétrico resultante tem seu módulo variando harmonicamente, e por isso, o valor médio da potência irradiada tem o fator $\frac{1}{2}$ que corresponde ao valor médio de $\cos^2(\omega t)$ em um período da onda.

Exemplo 4.6 – Uma onda linearmente polarizada penetra em um meio dissipativo anisotrópico no qual a constante de atenuação, a constante de fase ou ambas tem valores diferentes dependendo da direção do campo elétrico. Vamos analisar o efeito da anisotropia na polarização da onda. Consideremos inicialmente dois valores da constante de atenuação, α_x e α_y para os campos nas direções x e y , respectivamente. Cada componente é atenuada de uma maneira diferente. Se a amplitude da onda incidente é e_o e o seu plano de polarização forma um ângulo θ_o com a direção x , temos:

$$(Ex.27) \quad |\vec{e}_x| = e_o \cos(\theta_o) e^{-\alpha_x z}$$

$$(Ex.28) \quad |\vec{e}_y| = e_o \sin(\theta_o) e^{-\alpha_y z}$$

Assim, após um deslocamento z nesse meio, o plano de polarização terá rotacionado para uma nova posição dada por:

$$(Ex.29) \quad \theta = \arctg \left[\frac{|\vec{e}_y|}{|\vec{e}_x|} \right] = \arctg \left[\operatorname{tg}(\theta_o) e^{(\alpha_x - \alpha_y)z} \right]$$

Assim, se $\alpha_x > \alpha_y$, o plano de polarização gira para a posição do plano yz . Por outro lado, se $\alpha_x < \alpha_y$, o plano de polarização gira para a posição do plano xz .

Com isso, é possível obter uma certa polarização conhecida para uma onda cuja polarização não seja conhecida, a princípio. Além disso, como a análise se aplica também a ondas circularmente polarizadas, concluímos que é possível converter a polarização de circular para linear se a distância z percorrida é suficiente para atenuar completamente uma das componentes.

Consideremos agora o efeito na polarização se a anisotropia afeta a constante de fase. Chamando as constantes de fase de β_x e β_y nas direções x e y , respectivamente, as componentes da onda podem ser escritas na forma:

$$(Ex.30) \quad \vec{e}_x = e_{x0} \cos(\omega t - \beta_x z) \hat{x}$$

$$(Ex.31) \quad \vec{e}_y = e_{y0} \cos[\omega t - \beta_x z + (\beta_x - \beta_y)z] \hat{y}$$

vemos que a componente y do campo elétrico sofre um defasamento proporcional ao deslocamento da onda, dado por: $\delta = (\beta_x - \beta_y)z$. Como consequência, a onda linearmente polarizada é convertida em elipticamente polarizada.

Reflexão e Transmissão em Interfaces

Até aqui utilizamos o conceito de meio ilimitado e homogêneo para estudar a propagação de ondas eletromagnéticas planas. Contudo, essa situação é irreal, pois qualquer meio é necessariamente limitado em extensão ou apresenta, dentro de algum volume suficientemente grande, variações das propriedades condutividade, permissividade e permeabilidade em uma ou mais direções. Nesta seção, vamos deixar a idealização de meio ilimitado e homogêneo para estudar os efeitos da variação abrupta da impedância característica em uma certa região do espaço. Devido à variação abrupta, podemos caracterizar com precisão a existência de uma interface entre dois materiais com propriedades eletromagnéticas distintas. A fim de simplificar a análise matemática, consideraremos somente interfaces planas. Consideremos o esquema mostrado na Figura 4.14. Uma onda eletromagnética gerada no meio 1 propaga-se até a interface com o meio 2. Ao incidir na interface, dois processos ocorrem: uma parte da onda incidente retorna ao meio 1 e outra parte se transmite para o meio 2. Surge então uma onda refletida e uma onda transmitida. É nosso objetivo nesta

seção calcular as intensidades e direções de propagação dessas ondas e relacionar isso com as características da onda incidente.

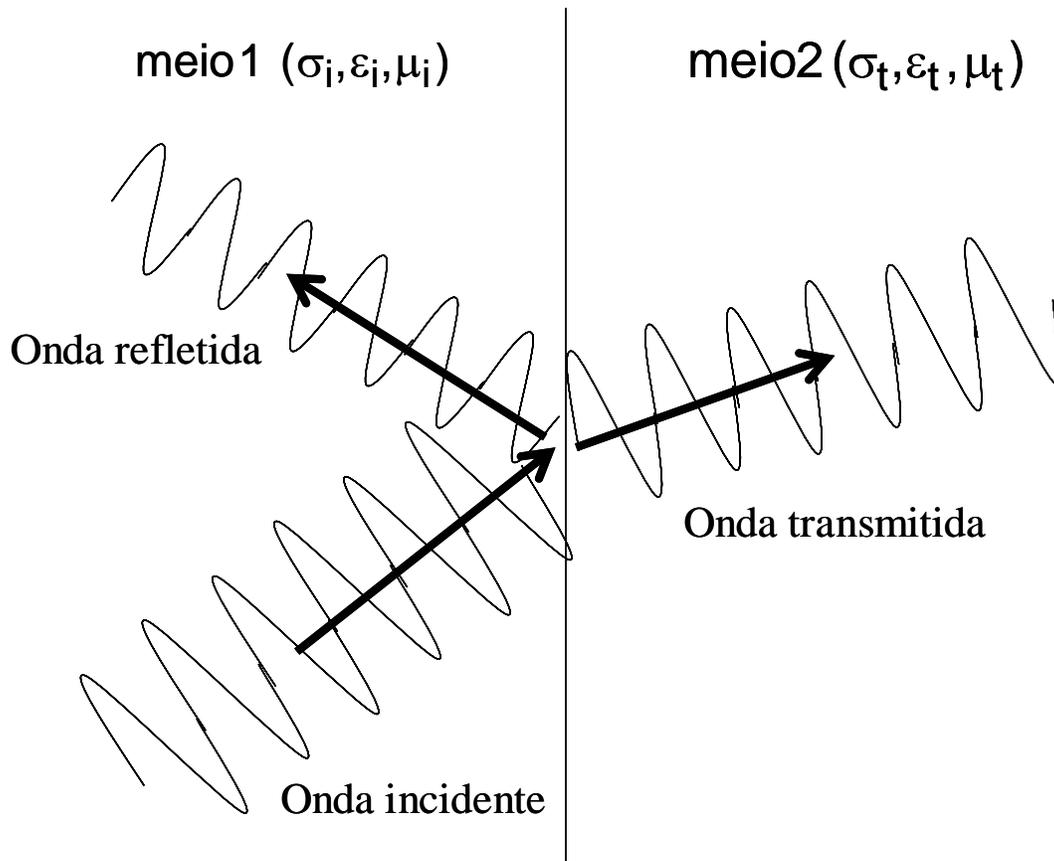


Figura 4.14 – A incidência de uma onda eletromagnética em uma interface entre dois meios com propriedades diferentes gera uma onda refletida e uma onda transmitida.

Definimos o plano de incidência como sendo o plano que contém o vetor de onda incidente e o vetor normal á interface. Como mostram as Figuras 4.15 e 4.16, existem duas situações especiais de polarização da onda incidente em relação ao plano de incidência. Chamamos de polarização paralela, se o campo elétrico incidente está contido no plano de incidência e polarização perpendicular se o campo elétrico é perpendicular ao plano de incidência. Qualquer outra polarização da onda incidente pode ser descrita por uma combinação adequada de uma onda polarizada paralelamente com outra onda polarizada perpendicularmente. Como

as intensidades das ondas refletida e transmitida dependem da polarização da onda incidente, consideraremos esses dois casos especiais separadamente.

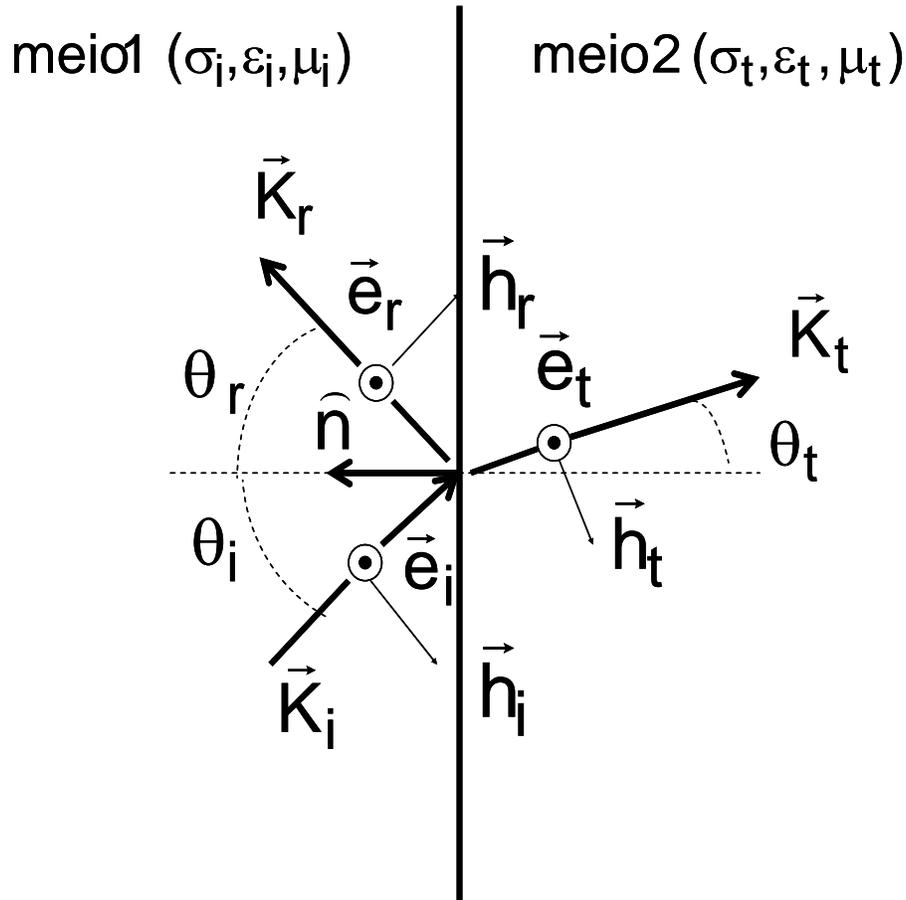


Figura 4.15 – incidência com polarização perpendicular. Os vetores de campo elétrico são perpendiculares ao plano definido por \vec{K}_i e \hat{n} e são identificados por (\bullet) .

Incidência com polarização perpendicular

Consideremos inicialmente a situação em que a onda incidente (e conseqüentemente as ondas refletida e transmitida também) tem seu vetor campo elétrico perpendicular ao plano de incidência (Figura 4.15). Isso significa que o campo elétrico é paralelo à interface. No Apêndice 3.5 demonstra-se que as componentes paralelas dos campos elétrico e magnético são contínuas através de qualquer interface entre dois meios com diferentes propriedades eletromagnéticas e desprovidas de correntes superficiais. Podemos então aplicar essa condição de

continuidade a fim de obter relações entre os campos em ambos os lados da interface.

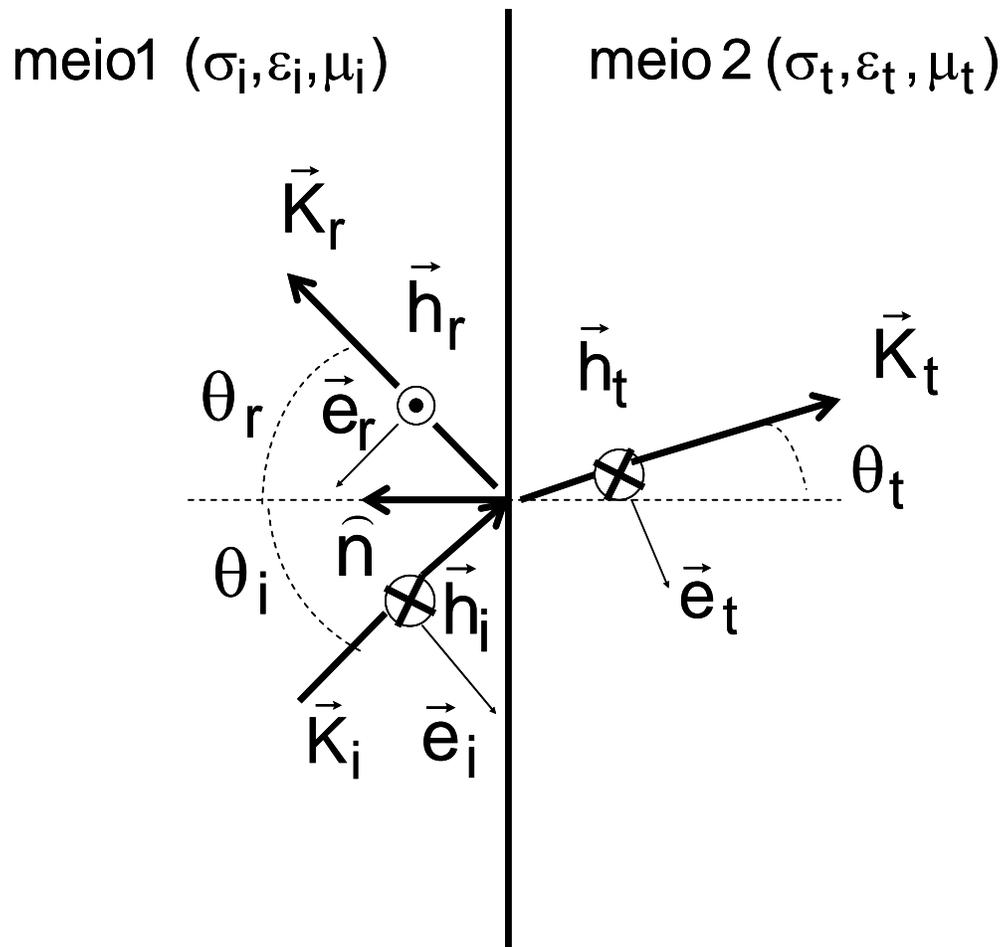


Figura 4.16 – Incidência com polarização paralela. Os vetores de campo elétrico estão contidos no plano definido por \vec{K}_i e \hat{n} . Os vetores de campo magnético são identificados por \otimes nas ondas incidente e transmitida e por \odot na onda refletida.

No caso da polarização perpendicular, de acordo com essa condição de contorno, os fasores de campo correspondentes das três ondas se relacionam por meio das seguintes equações:

$$(4.174) \quad \begin{aligned} E_i + E_r &= E_t \\ H_i \cos \theta_i - H_r \cos \theta_r &= H_t \cos \theta_t \end{aligned}$$

onde os índices identificam os campos das ondas ‘incidente’, ‘refletida’ e ‘transmitida’ e os ângulos de incidência (θ_i), de reflexão (θ_r) e de transmissão (θ_t)

são medidos em relação à direção normal à interface. Os campos são descritos por equações semelhantes a (4.71) e (4.72), porém como as direções de propagação são diferentes para cada onda mas a referência de posição deve ser a mesma, é adequado usar uma descrição mais geral através do vetor de onda. Assim, temos:

$$(4.175) \quad \vec{E}_i = \vec{E}_{oi} e^{-\vec{K}_i \cdot \vec{r}}$$

$$(4.176) \quad \vec{H}_i = \vec{H}_{oi} e^{-\vec{K}_i \cdot \vec{r}}$$

$$(4.177) \quad \vec{E}_r = \vec{E}_{or} e^{-\vec{K}_r \cdot \vec{r}}$$

$$(4.178) \quad \vec{H}_r = \vec{H}_{or} e^{-\vec{K}_r \cdot \vec{r}}$$

$$(4.179) \quad \vec{E}_t = \vec{E}_{ot} e^{-\vec{K}_t \cdot \vec{r}}$$

$$(4.180) \quad \vec{H}_t = \vec{H}_{ot} e^{-\vec{K}_t \cdot \vec{r}}$$

Contudo, as condições de contorno especificadas em (4.174) devem ser válidas em qualquer ponto da interface e em todos os instantes de tempo. Por exemplo, se o vetor de posição para um ponto na interface sofrer um deslocamento paralelo à interface, a equação (4.175) muda da seguinte maneira:

$$(4.181) \quad \vec{E}_i(\vec{r} + \Delta\vec{r}) = \vec{E}_{oi} e^{-\vec{K}_i \cdot (\vec{r} + \Delta\vec{r})} = \vec{E}_i(\vec{r}) e^{-\vec{K}_i \cdot \Delta\vec{r}}$$

e assim também os outros campos se transformam. Para que as equações (4.174) continuem válidas para essa nova posição, é necessário que o fator $e^{-\vec{K} \cdot \Delta\vec{r}}$ seja igual para todas as ondas, e isso implica em que as projeções dos três vetores de onda no plano da interface sejam iguais. Isto nos leva a seguinte relação:

$$(4.182) \quad K_i \sin\theta_i = K_r \sin\theta_r = K_t \sin\theta_t$$

Como vimos anteriormente, o módulo do vetor de onda é igual à constante de propagação no meio. Assim, temos $K_i = K_r$ e a primeira igualdade em (4.182) nos leva a concluir que:

$$(4.183) \quad \theta_r = \theta_i$$

ou seja, o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência. Esta conclusão é conhecida como lei de Snell para a reflexão. Podemos escrever a segunda igualdade na forma:

$$(4.184) \quad \gamma_i \operatorname{sen} \theta_i = \gamma_t \operatorname{sen} \theta_t$$

Sendo γ uma quantidade complexa, esta equação tem uma interpretação simples apenas se os materiais envolvidos forem não dissipativos. Neste caso, usando a equação (4.94) em (4.184), obtemos:

$$(4.185) \quad \sqrt{\mu_i \varepsilon_i} \operatorname{sen} \theta_i = \sqrt{\mu_t \varepsilon_t} \operatorname{sen} \theta_t$$

ou, na forma mais comum, usando os índices de refração dos materiais envolvidos:

$$(4.186) \quad n_i \operatorname{sen} \theta_i = n_t \operatorname{sen} \theta_t$$

Esta equação é denominada de lei de Snell para a refração. A refração é o processo de mudança de direção de propagação da onda quando ela passa de um meio para outro com propriedades diferentes. De acordo com esta equação, se $n_t > n_i$ temos $\theta_t < \theta_i$, e a onda se transmite em uma direção mais próxima da normal à interface. Esta é a situação que ocorre na interface entre o ar ($n \cong 1$) e a água ($n \cong 9$) se a onda incide a partir do ar. Se a onda incide a partir da água, por outro lado, temos a situação inversa e a onda se transmite numa direção mais afastada da normal.

Se um dos meios envolvidos na interface é dissipativo (ou ambos), a equação (4.186) não é válida, mas (4.184) continua válida. Entretanto, a análise neste caso não é mais tão simples e será deixada para o final desta seção.

Continuaremos considerando ambos os meios como dielétricos perfeitos. Podemos resolver agora as equações (4.174) para obter relações entre as amplitudes das ondas. Utilizando a impedância de cada meio, podemos substituir os campos magnéticos por expressões dependentes do campo elétrico em cada onda, ou seja:

$$(4.187) \quad H_i = E_i / Z_i, \quad H_r = E_r / Z_i, \quad H_t = E_t / Z_t$$

Assim, obtemos o seguinte sistema de equações com duas variáveis a determinar:

$$(4.188) \quad \begin{aligned} E_{oi} + E_{or} &= E_{ot} \\ (E_{oi} - E_{or}) \frac{\cos \theta_i}{Z_i} &= E_{ot} \frac{\cos \theta_t}{Z_t} \end{aligned}$$

cujas soluções para as amplitudes E_{or} e E_{ot} são:

$$(4.189) \quad E_{or} = E_{oi} \frac{Z_t \cos \theta_i - Z_i \cos \theta_t}{Z_t \cos \theta_i + Z_i \cos \theta_t}$$

$$(4.190) \quad E_{ot} = E_{oi} \frac{2Z_t \cos \theta_i}{Z_t \cos \theta_i + Z_i \cos \theta_t}$$

Definem-se os coeficientes de reflexão e de transmissão da interface segunda as equações:

$$(4.191) \quad r = E_{or}/E_{oi}$$

$$(4.192) \quad t = E_{ot}/E_{oi}$$

De acordo com as equações (4.189) e (4.190), na polarização perpendicular, esses coeficientes são dados por:

$$(4.193) \quad r_{\perp} = \frac{Z_t \cos \theta_i - Z_i \cos \theta_t}{Z_t \cos \theta_i + Z_i \cos \theta_t}$$

$$(4.194) \quad t_{\perp} = \frac{2Z_t \cos \theta_i}{Z_t \cos \theta_i + Z_i \cos \theta_t}$$

No caso de incidência normal, $\theta_i = \theta_t = 0$, esses coeficientes se simplificam para:

$$(4.195) \quad r_{\perp} = \frac{Z_t - Z_i}{Z_t + Z_i}$$

$$(4.196) \quad t_{\perp} = \frac{2Z_t}{Z_t + Z_i}$$

Para interfaces envolvendo meios dielétricos perfeitos, os coeficientes de reflexão e de transmissão são números reais e independentes da frequência, desde que não ocorra reflexão total, o que será tratado no final desta seção. Note que o coeficiente de reflexão pode ser negativo, indicando uma diferença de fase de π radianos da onda refletida em relação à onda incidente. Note também que na polarização perpendicular vale a seguinte relação entre os coeficientes:

$$(4.197) \quad r_{\perp} + 1 = t_{\perp}$$

Quando aplicados em problemas da óptica é mais conveniente expressar r e t como funções dos índices de refração dos meios envolvidos. Substituindo

$Z = \sqrt{\mu/\varepsilon} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ para as impedâncias dos dois meios se forem materiais não

magnéticos, e usando a lei de Snell (4.186) para substituir $\cos \theta_t$ em (4.193) e (4.194), obtemos:

$$(4.198) \quad r_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{(n_t/n_i)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{(n_t/n_i)^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$(4.199) \quad t_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{(n_t/n_i)^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

Incidência com polarização paralela

Consideremos agora o caso de polarização paralela ao plano de incidência (Figura 4.16). Nesta situação os campos elétricos das ondas estão contidos no plano de incidência e os campos magnéticos são paralelos à interface. As condições de contorno agora são escritas na seguinte forma:

$$(4.200) \quad \begin{aligned} E_{oi} \cos \theta_i + E_{or} \cos \theta_r &= E_{ot} \cos \theta_t \\ H_{oi} - H_{or} &= H_{ot} \end{aligned}$$

Novamente substituindo o campo magnético em função do campo elétrico para cada onda e resolvendo o sistema de equações, obtemos as amplitudes dos campos elétricos das ondas refletida e transmitida na forma a seguir:

$$(4.201) \quad E_{or} = E_{oi} \frac{Z_t \cos \theta_t - Z_i \cos \theta_i}{Z_t \cos \theta_t + Z_i \cos \theta_i}$$

$$(4.202) \quad E_{ot} = E_{oi} \frac{2Z_t \cos \theta_i}{Z_t \cos \theta_t + Z_i \cos \theta_i}$$

Vemos então, que os coeficientes de reflexão e de transmissão para polarização paralela são dados por:

$$(4.203) \quad r_{\parallel} = \frac{Z_t \cos \theta_t - Z_i \cos \theta_i}{Z_t \cos \theta_t + Z_i \cos \theta_i}$$

$$(4.204) \quad t_{\parallel} = \frac{2Z_t \cos \theta_i}{Z_t \cos \theta_t + Z_i \cos \theta_i}$$

No caso de incidência normal, esses coeficientes se simplificam para:

$$(4.205) \quad r_{\parallel} = \frac{Z_t - Z_i}{Z_t + Z_i}$$

$$(4.206) \quad t_{\parallel} = \frac{2Z_t}{Z_t + Z_i}$$

Comparando (4.195) e (4.196) com (4.205) e (4.206) vemos que para incidência normal $t_{\parallel} = t_{\perp}$ e $r_{\parallel} = r_{\perp}$.

Como funções explícitas dos índices de refração, os coeficientes de transmissão e reflexão para polarização paralela na interface entre dois dielétricos não magnéticos, são dados por:

$$(4.207) \quad r_{\parallel} = \frac{\sqrt{(n_t/n_i)^2 - \text{sen}^2 \theta_i} - (n_t/n_i)^2 \cos \theta_i}{\sqrt{(n_t/n_i)^2 - \text{sen}^2 \theta_i} + (n_t/n_i)^2 \cos \theta_i}$$

$$(4.208) \quad t_{\parallel} = \frac{2(n_t/n_i) \cos \theta_i}{\sqrt{(n_t/n_i)^2 - \text{sen}^2 \theta_i} + (n_t/n_i)^2 \cos \theta_i}$$

As Figuras 4.17 e 4.18 mostram a dependência do coeficiente de reflexão com o índice de refração e com o ângulo de incidência para uma interface envolvendo meios dielétricos nas polarizações perpendicular e paralela.

Exemplo 4.7 – Quando uma onda incide em uma interface, a potência que ela transporta se distribui nas ondas refletida e transmitida. No caso de incidência perpendicular, é possível estabelecer relações entre os coeficientes de reflexão e transmissão para que o princípio de conservação de energia expresso no teorema de Poynting seja satisfeito. Consideraremos nesta análise, apenas o caso específico, mas importante, de uma interface entre um dielétrico perfeito e um Condutor. Uma vez que estamos considerando apenas a incidência perpendicular, escolhemos o eixo z nesta direção, tendo sua origem na interface e no mesmo sentido de propagação da onda incidente. Desse modo, os campos elétricos e

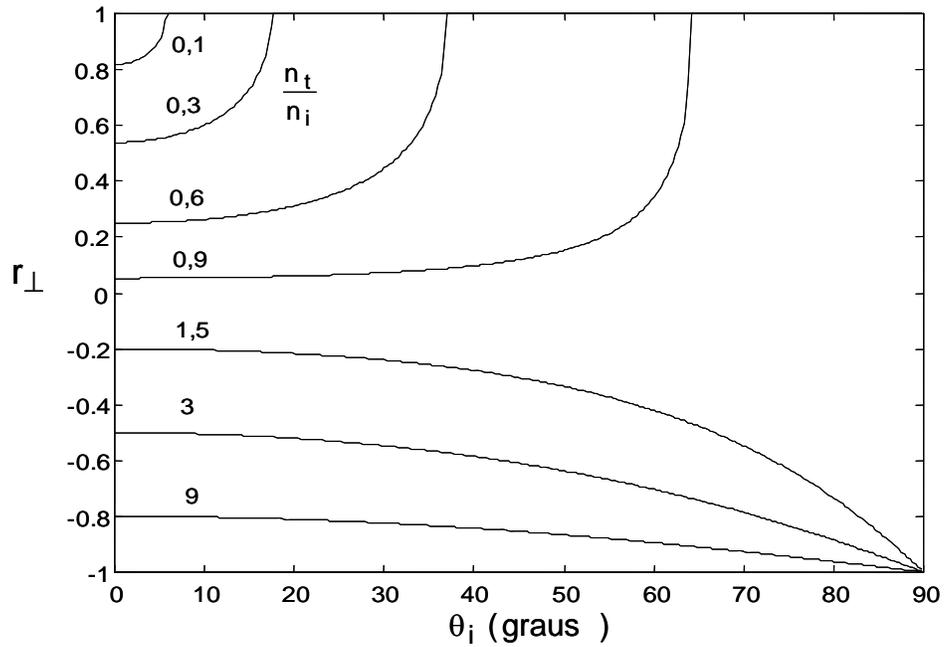


Figura 4.17 – Coeficiente de reflexão na incidência com polarização linear perpendicular em função do ângulo de incidência para diversos valores do quociente entre n_t e n_i .

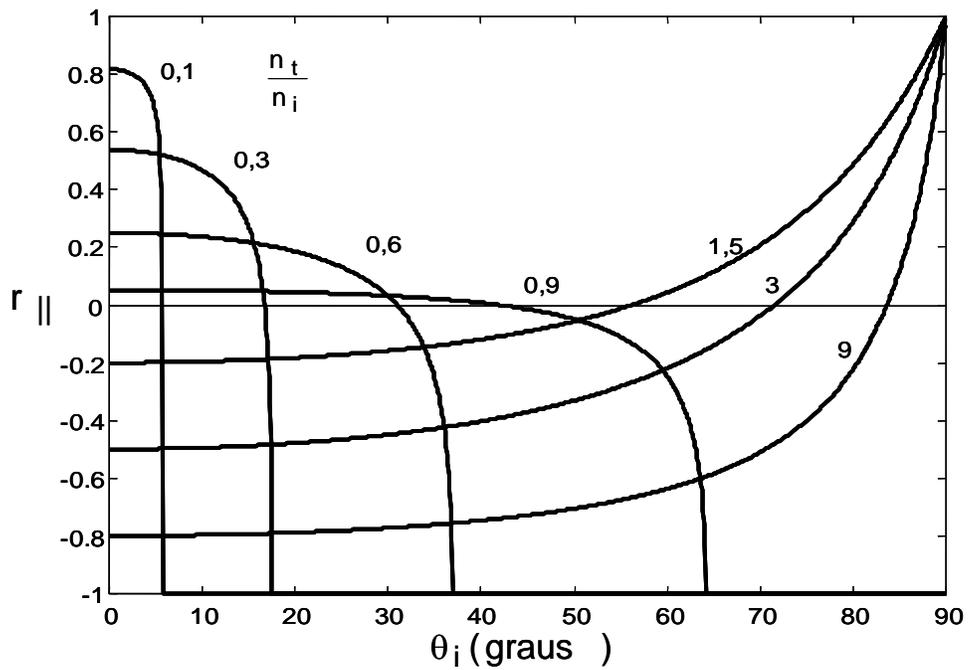


Figura 4.18 – Coeficiente de reflexão na incidência com polarização linear paralela em função do ângulo de incidência para diversos valores do quociente entre n_t e n_i .

magnéticos das ondas incidente, refletida e transmitida são descritos pelos fasores:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_i &= E_{oi} e^{-j\beta_o z} \hat{x} \\
 \vec{E}_r &= r E_{oi} e^{j\beta_o z} \hat{x} \\
 \vec{E}_t &= t E_{oi} e^{-\alpha z} e^{-j\beta_c z} \hat{x} \\
 \text{(Ex.32)} \quad \vec{H}_i &= \frac{E_{oi}}{Z_o} e^{-j\beta_o z} \hat{y} \\
 \vec{H}_r &= -\frac{r E_{oi}}{Z_o} e^{j\beta_o z} \hat{y} \\
 \vec{H}_t &= \frac{t E_{oi}}{Z_c} e^{-\alpha z} e^{-j\beta_c z} \hat{y}
 \end{aligned}$$

Onde Z_o é impedância do dielétrico e Z_c do condutor. De modo análogo, β_o e β_c são as constantes de fase no dielétrico e no condutor, respectivamente. Consideramos que a onda incide pelo dielétrico. Note que incluímos um sinal negativo no campo magnético refletido para levar em conta o fato do vetor de Poynting refletido apontar no sentido $-z$. No lado de incidência, ocorre superposição dos campos das ondas incidente e refletida. Os campos resultantes são dados por:

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= E_{oi} (e^{-j\beta z} + r e^{j\beta z}) \hat{x} \\
 \text{(Ex.33)} \quad \vec{H} &= \frac{E_{oi}}{Z_o} (e^{-j\beta z} - r e^{j\beta z}) \hat{y}
 \end{aligned}$$

O vetor de Poynting resultante associado a esses campos é, portanto:

$$\text{(Ex.34)} \quad \vec{S}_i = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \frac{E_{oi}^2}{Z_o} (e^{-j\beta z} + r e^{j\beta z}) (e^{j\beta z} - r^* e^{-j\beta z}) \hat{z}$$

Efetuada as multiplicações e simplificando a expressão, teremos:

$$\text{(Ex.35)} \quad \vec{S}_i = \frac{1}{2} \frac{E_{oi}^2}{Z_o} [(1 - |r|^2) + (r e^{j2\beta z} - r^* e^{-j2\beta z})] \hat{z}$$

Substituindo $r = |r| e^{j\delta}$ e usando a identidade $\text{sen}\theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$, obtemos:

$$\text{(Ex.36)} \quad \vec{S}_i = \frac{1}{2} \frac{E_{oi}^2}{Z_o} [(1 - |r|^2) + j2|r| \text{sen}(2\beta z + \delta)] \hat{z}$$

Com isso, vemos que do lado de incidência, existe potência ativa e reativa alcançando a interface. Essas parcelas são obtidas de (Ex.36) fazendo $z=0$ nesta equação:

$$(Ex.37) \quad \begin{aligned} \bar{S}_{ai} &= \frac{1}{2} \frac{E_{oi}^2}{Z_0} (1 - |r|^2) \hat{z} \\ \bar{S}_{ri} &= \frac{E_{oi}^2}{Z_0} |r| \text{sen}(\delta) \hat{z} \end{aligned}$$

Por sua vez, a potência transmitida para o meio condutor é dada por:

$$(Ex.38) \quad \bar{S}_t = \frac{1}{2} \bar{E}_t \times \bar{H}_t^* = \frac{1}{2} \frac{|t|^2 E_{oi}^2}{Z_c^*} e^{-2\alpha z} \hat{z}$$

Separando as partes real e imaginária da potência transmitida obtemos a potência ativa e a potência reativa transmitidas. Exatamente na interface, em $z=0$, temos:

$$(Ex.39) \quad \begin{aligned} \bar{S}_{at} &= \frac{1}{2} \frac{|t|^2 E_{oi}^2}{|Z_c|} \cos \phi \hat{z} \\ \bar{S}_{rt} &= \frac{1}{2} \frac{|t|^2 E_{oi}^2}{|Z_c|} \text{sen} \phi \hat{z} \end{aligned}$$

A relação entre os vetores de Poynting no lado do dielétrico e no lado condutor são obtidas pela aplicação do teorema de Poynting a um volume que tende a zero em torno da interface (ver Figura 3.31 - Apêndice 3.5). Uma vez que o volume tende a zero, as integrais de volume se anulam e o teorema de Poynting, no caso de incidência perpendicular, informa que o vetor de Poynting é contínuo na interface. Assim, comparando as expressões (Ex.37) com (Ex.39), obtemos as seguintes relações:

$$(Ex.40) \quad \frac{1}{Z_0} (1 - |r|^2) = \frac{|t|^2}{|Z_c|} \cos \phi$$

$$(Ex.41) \quad \frac{1}{Z_0} |r| \text{sen}(\delta) = \frac{|t|^2}{2|Z_c|} \text{sen} \phi$$

Para uma interface entre dielétricos, $\text{sen}\phi$ e $\text{sen}\delta$ são nulos e apenas a equação (Ex.40) é significativa. Como as impedâncias são reais nesse caso, podemos

substituir $Z = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ se $\mu_r = 1$. Com isso, podemos reescrever (Ex.40) na forma:

$$(Ex.42) \quad |r|^2 + \frac{n_t}{n_i} |t|^2 = 1$$

Exemplo 4.8 – Consideremos uma estrutura formada por três materiais diferentes segundo a Figura 4.19. A camada central tem espessura ‘d’ e os dois meios laterais são semi-infinitos. Vamos obter os coeficientes de reflexão e transmissão dessa estrutura para incidência perpendicular supondo que as propriedades eletromagnéticas dos materiais não variam com a frequência. De acordo com o esquema mostrado na Figura 4.19, a onda incidente sofre uma reflexão principal na interface 1-2 e várias reflexões secundárias nas interfaces 2-1 e 2-3. Assim, a onda refletida total será composta de inúmeros termos decorrentes da transmissão na interface 2-1 somados à onda refletida principal. Podemos expressar isso na forma:

(Ex.43)

$$E_r = r_{12} E_i + t_{12} t_{21} r_{23} E_i e^{-2\gamma d} \left(1 + r_{21} r_{23} e^{-2\gamma d} + r_{21}^2 r_{23}^2 e^{-4\gamma d} + r_{21}^3 r_{23}^3 e^{-6\gamma d} + \dots \right)$$

Usando a fórmula da soma da série de potências, obtemos:

$$(Ex.44) \quad E_r = r_{12} E_i + \frac{t_{12} t_{21} r_{23} e^{-2\gamma d}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2\gamma d}} E_i$$

Com isso, o coeficiente de reflexão efetivo da montagem é dado por:

$$(Ex.45) \quad r_{ef} = r_{12} + \frac{t_{12} t_{21} r_{23} e^{-2\gamma d}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2\gamma d}}$$

De modo análogo, a transmissão total pode ser obtida somando-se todas as componentes transmitidas em cada incidência na interface 2-3. Assim, temos:

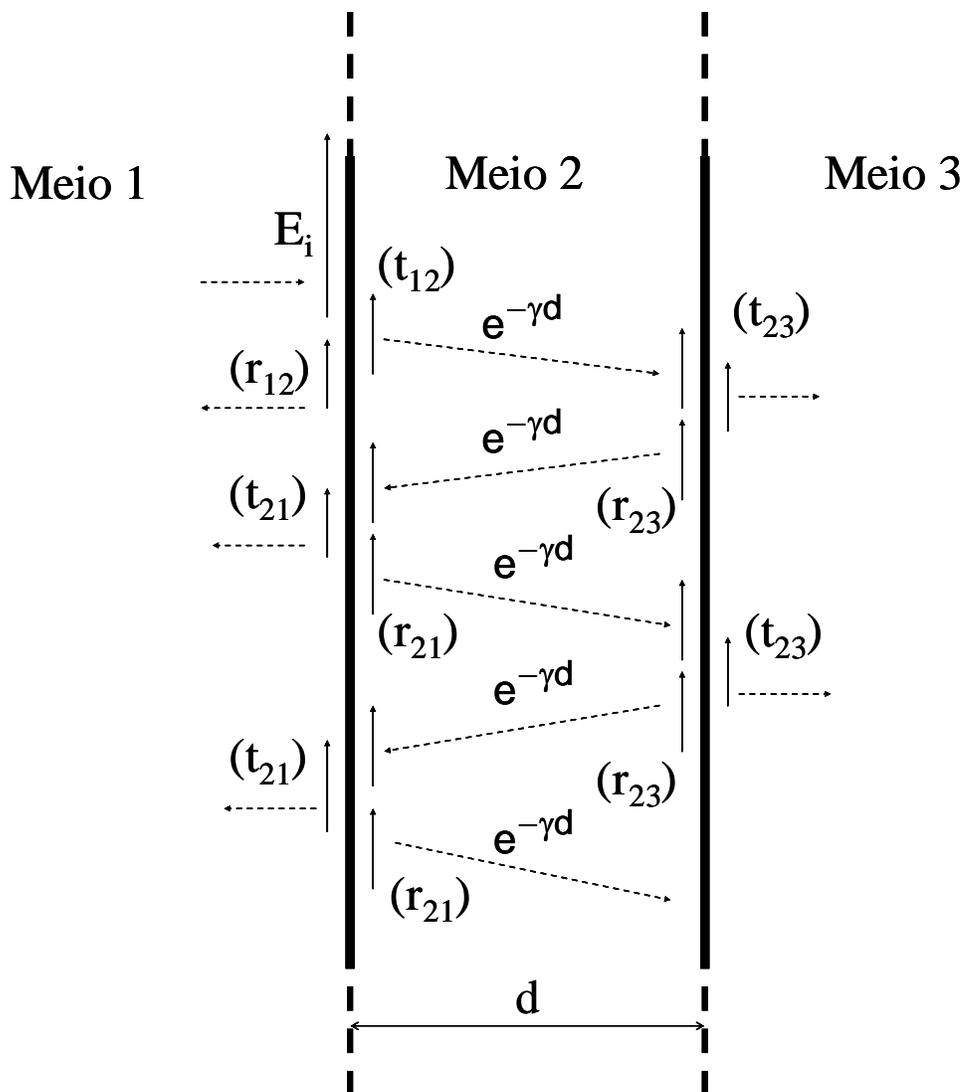


Figura 4.19 – Estrutura com dois meios semi-infinitos separados por uma camada de espessura d . Em cada interface as ondas incidentes sofrem reflexão e transmissão. Os coeficientes de reflexão e transmissão para cada incidência são indicados entre parênteses.

$$\begin{aligned}
 E_t &= t_{12} t_{23} E_i e^{-\gamma d} \left(1 + r_{21} r_{23} e^{-2\gamma d} + r_{21}^2 r_{23}^2 e^{-4\gamma d} + r_{21}^3 r_{23}^3 e^{-6\gamma d} + \dots \right) \\
 \text{(Ex.46)} \quad &= \frac{t_{12} t_{23} e^{-\gamma d}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2\gamma d}} E_i
 \end{aligned}$$

O coeficiente de transmissão efetivo é, então, dada por:

$$\text{(Ex.47)} \quad t_{ef} = \frac{t_{12} t_{23} e^{-\gamma d}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2\gamma d}}$$

A fim de visualizar mais facilmente o efeito das reflexões sucessivas na reflexão e transmissão efetivas da camada intermediária, vamos considerar um exemplo simples de uma placa dielétrica no ar. Uma vez que a incidência é perpendicular e os meios envolvidos são dielétricos com permeabilidade relativa unitária, as impedâncias são facilmente obtidas como $Z_1 = Z_3 = Z_0 \approx 376,8\Omega$ e $Z_2 = Z_0/n$, onde n é o índice de refração da placa. Os coeficientes de reflexão e transmissão em cada interface são quantidades reais que se relacionam da seguinte maneira:

$$(Ex.48) \quad \begin{aligned} r_{21} &= r_{23} = -r_{12} \\ t_{21} &= t_{23} = \frac{Z_1}{Z_2} t_{12} = n t_{12} \end{aligned}$$

A constante de propagação é puramente imaginária $\gamma = j2\pi/\lambda$. Com isso, a reflexão e transmissão efetivas na placa dependem da relação entre a sua espessura e o comprimento de onda nesse material. Existem duas condições extrema quando $|2\gamma d| = 4\pi d/\lambda$ é um múltiplo de π radianos. Substituindo $e^{-jm\pi} = \cos(m\pi)$ junto com (Ex.48) em (Ex.45), obtemos:

$$(Ex.49) \quad r_{ef} = r_{12} \left[\frac{1 - \frac{n t_{12}^2 \cos(m\pi)}{1 - r_{12}^2 \cos(m\pi)}}{1 - r_{12}^2 \cos(m\pi)} \right] = r_{12} \left[\frac{1 - (r_{12}^2 + n t_{12}^2) \cos(m\pi)}{1 - r_{12}^2 \cos(m\pi)} \right]$$

Levando em conta a relação (Ex.42), temos:

$$(Ex.50) \quad r_{ef} = r_{12} \left[\frac{1 - \cos(m\pi)}{1 - r_{12}^2 \cos(m\pi)} \right]$$

A condição $4\pi d/\lambda = m\pi$ ocorre nas frequências múltiplas da frequência fundamental:

$$(Ex.51) \quad f_0 = \frac{c}{4nd}$$

Nas frequências pares ($2f_0, 4f_0, 6f_0, \dots$), com m par em (Ex.50), resulta em reflexão nula. Nas frequências ímpares ($f_0, 3f_0, 5f_0, \dots$), com m ímpar em (Ex.50), resulta no coeficiente de reflexão máximo dado por:

$$(Ex.52) \quad r_{ef \max} = \frac{2r_{12}}{1+r_{12}^2}$$

De modo semelhante, Substituindo $e^{-jm\pi} = \cos(m\pi)$ junto com (Ex.48) em (Ex.47), obtemos:

$$(Ex.53) \quad t_{ef} = \frac{n t_{12}^2 \cos(m\pi)}{1 - r_{12}^2 \cos(m\pi)} = \frac{(1 - r_{12}^2) \cos(m\pi)}{1 - r_{12}^2 \cos(m\pi)}$$

onde usamos (Ex.42) para substituir $n t_{12}^2$. Nas freqüências pares o coeficiente de transmissão é unitário. Nas freqüências ímpares o coeficiente de transmissão é mínimo, sendo dado por:

$$(Ex.54) \quad t_{ef \min} = \frac{r_{12}^2 - 1}{1 + r_{12}^2}$$

As ocorrências de mínimos e máximos na reflexão e transmissão na placa se justificam pela superposição em fase (máximos) e em oposição de fase (mínimos) das componentes de onda que se superpõem em cada face da placa. A Figura 4.20 mostra como os módulos dos coeficientes de reflexão e transmissão para uma placa de vidro com $\epsilon_r = 6$ e espessura 10 cm variam com a freqüência da onda incidente. Neste caso, a freqüência fundamental é aproximadamente 306MHz.

Reflexão nula e reflexão total

Como mostra a Figura 4.18 existe um ângulo de incidência na polarização paralela para o qual o coeficiente de reflexão é nulo. Este ângulo é chamado de ângulo de Brewster. Quando uma onda plana incide sob o ângulo de Brewster em uma interface dielétrica, a componente paralelamente polarizada da onda não se reflete. Se a onda incidente possuir também uma componente perpendicularmente polarizada, esta componente sofrerá reflexão e a onda refletida será, então, linearmente polarizada na direção perpendicular ao plano de incidência. Este é um método possível para obter uma onda linearmente polarizada a partir de uma onda com polarização elíptica ou com polarização não conhecida. O ângulo de Brewster

é obtido algebricamente, resolvendo-se a equação $r_{\parallel} = 0$. Para meios dielétricos e não magnéticos, obtém-se a partir de (4.207) que o ângulo de Brewster é dado por:

$$(4.209) \quad \theta_B = \arctan\left(\frac{n_t}{n_i}\right)$$

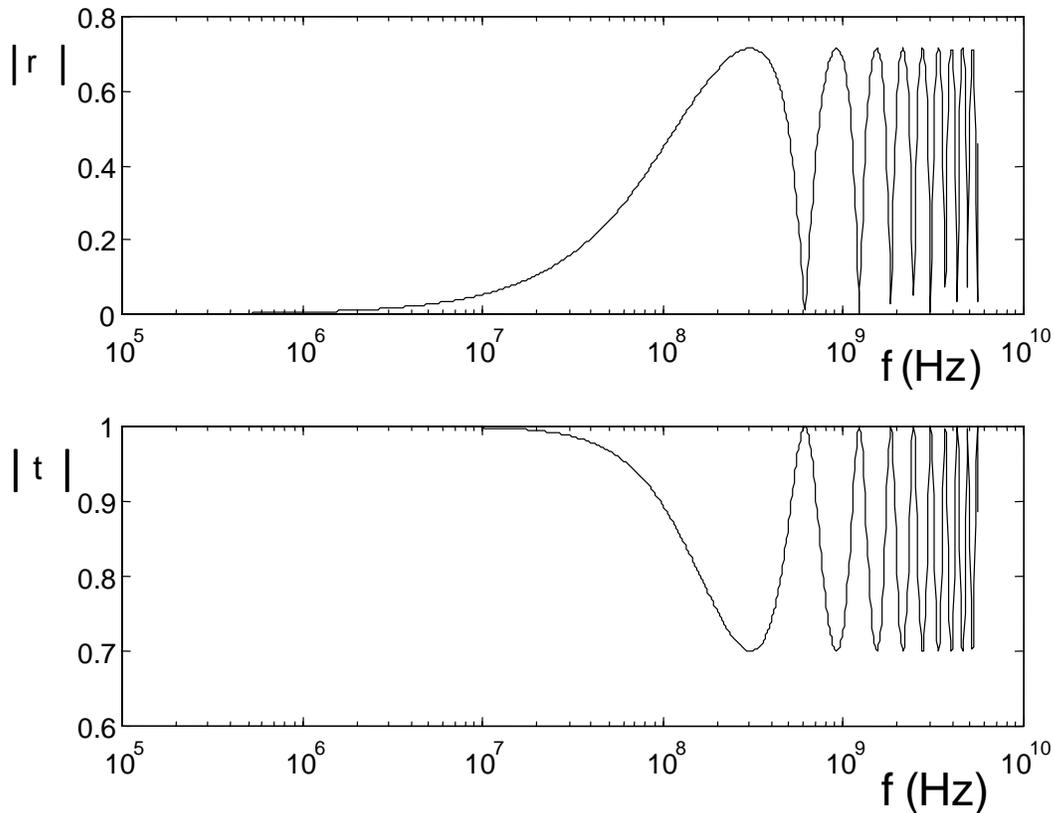


Figura 4.20 – Espectro do coeficiente de reflexão e de transmissão para uma placa de vidro com espessura de 10 cm e constante dielétrica 6.

Outro evento importante que pode ocorrer em uma interface dielétrica para a qual $n_t < n_i$ é a reflexão total. De acordo com a lei de Snell para a refração, se $n_t < n_i$, o ângulo de transmissão é maior que o ângulo de incidência. Então, neste caso, existe um ângulo de incidência menor que 90° para o qual o ângulo de refração é exatamente 90° . Esse ângulo é chamado de ângulo crítico para reflexão total e, de acordo com (4.186), é dado por:

$$(4.210) \quad \theta_c = \arcsen\left(\frac{n_t}{n_i}\right)$$

Quando uma onda incide sob esse ângulo em uma interface dielétrica, a onda transmitida não se desloca para o interior do meio 2 mas se propaga paralelamente à interface. Se a incidência ocorre com ângulo maior que θ_c , a onda é totalmente refletida para o meio 1. A fim de obter estes resultados algebricamente, assumimos que da lei de Snell podemos encontrar um ângulo de transmissão que satisfaça a equação (4.186) para $\theta_i > \theta_c$, ou seja:

$$(4.211) \quad \text{sen}\theta_t = \frac{n_i}{n_t} \text{sen}\theta_i > 1$$

embora esta equação não possa ser satisfeita por qualquer ângulo real, ela pode ser satisfeita por um ângulo complexo. Desde que $\text{sen}\theta_t > 1$, usando a identidade trigonométrica $\text{sen}^2\theta_t + \text{cos}^2\theta_t = 1$, obtemos $\text{cos}\theta_t$ como um número imaginário:

$$(4.212) \quad \text{cos}\theta_t = \pm j\sqrt{\text{sen}^2\theta_t - 1}$$

$\text{sen}\theta_t$ e $\text{cos}\theta_t$ definem as componentes do vetor de onda da onda transmitida no meio 2 nas direções paralela e perpendicular à interface, respectivamente. Veja a Figura 4.21 para os detalhes. Sabemos que o módulo do vetor de onda é igual à constante de propagação, que para um dielétrico perfeito é igual a $j^{n\omega}/c$. Então, o vetor de onda pode ser escrito na forma:

$$(4.213) \quad \begin{aligned} \vec{K}_t &= j \frac{n_t\omega}{c} (\text{sen}\theta_t \hat{x} + \text{cos}\theta_t \hat{z}) = j \frac{n_t\omega}{c} \left(\text{sen}\theta_t \hat{x} - j\sqrt{\text{sen}^2\theta_t - 1} \hat{z} \right) \\ &= \frac{n_t\omega}{c} \sqrt{\text{sen}^2\theta_t - 1} \hat{z} + j \frac{n_t\omega}{c} \text{sen}\theta_t \hat{x} \end{aligned}$$

onde assumimos o sinal adequado de $\text{cos}\theta_t$ para satisfazer a condição de contorno $|\vec{E}_t| \rightarrow 0$ para $z \rightarrow \infty$. Podemos deduzir valores efetivos das constantes de atenuação e de fase no meio 2, de modo que possamos escrever $\vec{K}_t = \alpha_e \hat{z} + j\beta_e \hat{x}$. Estes valores são:

$$(4.214) \quad \alpha_e = \frac{n_t\omega}{c} \sqrt{\text{sen}^2\theta_t - 1}$$

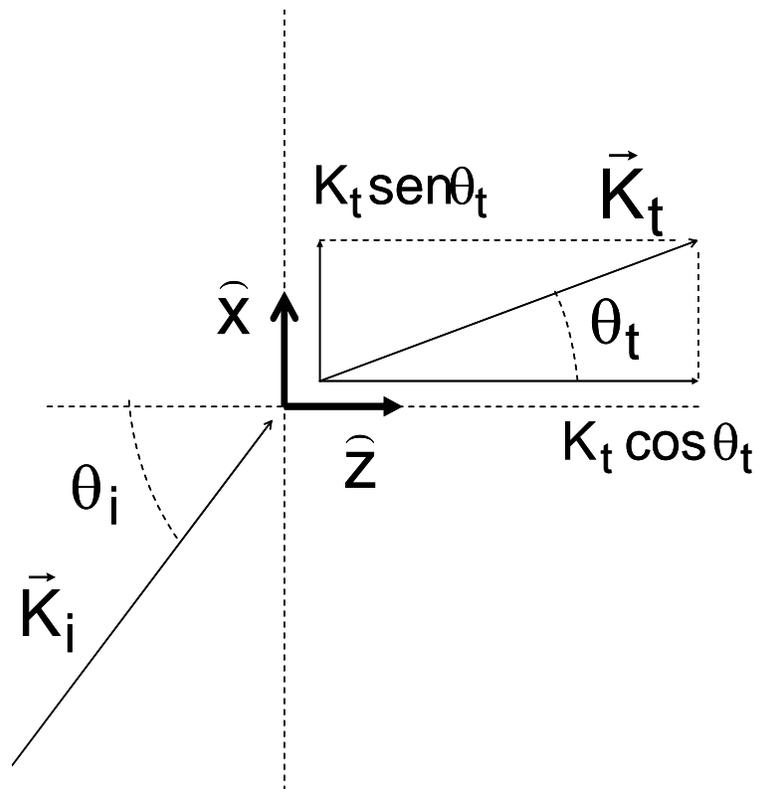


Figura 4.21 – Vetor de onda transmitido na incidência com ângulo maior que o ângulo crítico para reflexão total.

$$(4.215) \quad \beta_e = \frac{n_t \omega}{c} \text{sen} \theta_t$$

Com a origem do sistema de coordenadas fixada na própria interface, o vetor de posição no meio 2 é dado por $\vec{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$. Usando a expressão geral dada em (4.179), o campo elétrico da onda transmitida pode então ser escrito na forma:

$$(4.216) \quad \vec{E}_t = \vec{E}_{ot} e^{-\vec{K}_t \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{ot} e^{-\alpha_e z} e^{-j\beta_e x}$$

Concluimos que a onda não se transmite para o interior do meio 2 mas se desloca paralelamente a interface. Os campos são atenuados na direção z e pode-se dizer que a profundidade de penetração é igual a $1/\alpha_e$.

Para finalizar, podemos mostrar que a reflexão é total para $\theta_i > \theta_c$, substituindo o valor de $\cos \theta_t$ dado em (4.212) nas equações do coeficiente de reflexão

independentemente da polarização. Por exemplo, se substituirmos em (4.203), obtemos:

$$(4.217) \quad r_{||} = \frac{jZ_t \sqrt{\text{sen}^2 \theta_t - 1} + Z_i \cos \theta_i}{jZ_t \sqrt{\text{sen}^2 \theta_t - 1} - Z_i \cos \theta_i}$$

onde novamente usamos o sinal negativo do $\cos \theta_t$. O módulo de $r_{||}$ é então dada por:

$$(4.218) \quad |r_{||}| = \frac{\sqrt{Z_t^2 (\text{sen}^2 \theta_t - 1) + Z_i^2 \cos^2 \theta_i}}{\sqrt{Z_t^2 (\text{sen}^2 \theta_t - 1) + Z_i^2 \cos^2 \theta_i}} = 1$$

o que mostra que o módulo do campo refletido é igual ao campo incidente. Haverá entretanto uma diferença de fase entre as duas ondas.

Interface condutora

A análise de uma interface condutora é um pouco mais complicada. Consideremos uma interface entre um dielétrico e um condutor, como por exemplo, a superfície de uma placa metálica no ar. Se uma onda plana incide a partir do dielétrico na superfície do condutor, a lei de Snell para a refração, equação (4.184), nos permite escrever a seguinte expressão para o ângulo de transmissão:

$$(4.219) \quad \text{sen} \theta_t = \frac{j\beta_i}{(\alpha_t + j\beta_t)} \text{sen} \theta_i = \left[\frac{\beta_i \beta_t}{(\alpha_t^2 + \beta_t^2)} + j \frac{\beta_i \alpha_t}{(\alpha_t^2 + \beta_t^2)} \right] \text{sen} \theta_i$$

onde usamos $\gamma_i = j\beta_i$ e $\gamma_t = \alpha_t + j\beta_t$. Vemos então que $\text{sen} \theta_t$ é um número complexo e, portanto, não existe uma interpretação geométrica para θ_t . Contudo, como fizemos no caso da reflexão total, um valor complexo para $\text{sen} \theta_t$ ou $\cos \theta_t$ pode ser interpretado corretamente na composição do vetor de onda da onda transmitida. Para simplificar a álgebra, reescrevemos (4.219) na forma: $\text{sen} \theta_t = u + jw$. Assim, temos também:

$$(4.220) \quad \cos \theta_t = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_t} = \sqrt{1 + w^2 - u^2 - j2uw}$$

E novamente, para tornar mais simples as expressões, reescrevemos $\cos\theta_t = f + jg$. Com estes valores, podemos obter o argumento $\vec{K}_t \cdot \vec{r}$ para um referencial com origem na interface, na forma:

$$(4.221) \quad \begin{aligned} \vec{K}_t \cdot \vec{r} &= (\alpha_t + j\beta_t)(\sin\theta_t x + \cos\theta_t z) = (\alpha_t + j\beta_t)[(u + jw)x + (f + jg)z] \\ &= [(u\alpha_t - w\beta_t) + j(u\beta_t + w\alpha_t)]x + [(f\alpha_t - g\beta_t) + j(f\beta_t + g\alpha_t)]z \end{aligned}$$

Podemos dizer então, que as constantes de atenuação e de fase são diferentes nas direções perpendicular e paralela. As constantes efetivas nas duas direções são dadas por:

$$(4.222) \quad \begin{aligned} \alpha_x &= u\alpha_t - w\beta_t = 0 & \alpha_z &= f\alpha_t - g\beta_t \\ \beta_x &= u\beta_t + w\alpha_t = \beta_i \sin\theta_i & \beta_z &= f\beta_t + g\alpha_t \end{aligned}$$

Os resultados para α_x e β_x indicados em (4.222) são facilmente obtidos com a substituição de u e w a partir de (4.219). Assim, o campo elétrico da onda transmitida pode ser escrito na forma:

$$(4.223) \quad \vec{E}_t = \vec{E}_{ot} e^{-\vec{K}_t \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{ot} e^{-\alpha_z z} e^{-j(\beta_x x + \beta_z z)}$$

Vemos que a onda transmitida no condutor, no caso de incidência oblíqua, não é uma onda plana uniforme, pois o plano de fase constante $\beta_x x + \beta_z z = \text{cte}_1$ em geral não coincidirá com o plano de amplitude constante $\alpha_z z = \text{cte}_2$. A direção efetiva de propagação da onda no condutor é perpendicular ao plano de fase constante e o ângulo efetivo de propagação pode ser calculado por:

$$(4.224) \quad \theta_{et} = \arctan\left(\frac{\beta_x}{\beta_z}\right)$$

enquanto que a velocidade de fase efetiva é dada por:

$$(4.225) \quad v_e = \frac{\omega}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_z^2}}$$

Obviamente, para $\theta_i = 0$, temos uma situação particular na qual $\sin\theta_t = 0$ e $\cos\theta_t = 1$, de modo que $\vec{K}_t = (\alpha_t + j\beta_t)\vec{z}$ e a onda transmitida é uma onda plana uniforme se deslocando perpendicularmente à interface com velocidade $v = \frac{\omega}{\beta_t}$.

Os coeficientes de reflexão e transmissão obtidos para a interface dielétrica ainda são aplicados no caso de interface condutora, desde que se use o valor correto da impedância característica do condutor e $\cos \theta_t$ dado por (4.220).

Vejamos no caso de uma superfície metálica em uma frequência para o qual $\sigma \gg \omega \epsilon$ quais seriam as aproximações válidas para as expressões obtidas anteriormente. α_t e β_t na condição $\sigma \gg \omega \epsilon$, são dados por (4.114) e (4.115):

$$(4.226) \quad \alpha_t = \beta_t = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}}$$

Usando isto em (4.219) e (4.220), obtemos:

$$(4.227) \quad \text{sen} \theta_t = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_i}{\beta_t} \right) (1 + j) \text{sen} \theta_i$$

$$(4.228) \quad \text{cos} \theta_t = \sqrt{1 - j \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_i}{\beta_t} \right)^2 \text{sen}^2 \theta_i}$$

O fator $\frac{\beta_i}{\beta_t}$ nessas expressões tem o valor em função da frequência dado por:

$$(4.229) \quad \frac{\beta_i}{\beta_t} = \sqrt{\frac{2\omega \epsilon_0}{\sigma}}$$

Na condição $\sigma \gg \omega \epsilon$ temos $\frac{\beta_i}{\beta_t} \ll 1$, de modo que podemos aproximar $\text{cos} \theta_t \cong 1$.

Para os metais, esta aproximação é válida até mesmo para frequências tão altas quanto aquelas do início da região ultravioleta ($\approx 10^{15}$ Hz) do espectro eletromagnético. Os resultados principais para uma interface metálica são, então:

$$(4.230) \quad \alpha_z = \alpha_t \quad \beta_x = \beta_i \text{sen} \theta_i \quad \beta_z = \beta_t$$

$$(4.231) \quad \theta_{et} = \arctan \left(\sqrt{\frac{2\omega \epsilon_0}{\sigma}} \text{sen} \theta_i \right) \cong \sqrt{\frac{2\omega \epsilon_0}{\sigma}} \text{sen} \theta_i \cong 0$$

$$(4.232) \quad v_e = \frac{\omega}{\sqrt{\beta_t^2 + \beta_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}} = \frac{\omega / \beta_t}{\sqrt{1 + \frac{2\omega \epsilon_0}{\sigma} \text{sen}^2 \theta_i}} \cong \omega / \beta_t = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \sigma}}$$

Estas expressões mostram que para $\sigma \gg \omega\epsilon$, a onda transmitida no condutor tem velocidade e direção independentes do ângulo de incidência. A onda transmitida praticamente se desloca perpendicularmente à interface. Os coeficientes de reflexão e transmissão na interface ar-metal, obtidos a partir de (4.193), (4.194), (4.203) e (4.204) podem ser aproximados por:

$$(4.233) \quad r_{\perp} = \frac{\left(\frac{Z_t}{Z_i}\right) \cos \theta_i - 1}{\left(\frac{Z_t}{Z_i}\right) \cos \theta_i + 1} \cong -1$$

$$(4.234) \quad t_{\perp} = \frac{2\left(\frac{Z_t}{Z_i}\right) \cos \theta_i}{\left(\frac{Z_t}{Z_i}\right) \cos \theta_i + 1} \cong 2\left(\frac{Z_t}{Z_i}\right) \cos \theta_i$$

$$(4.235) \quad r_{\parallel} = \frac{\left(\frac{Z_t}{Z_i}\right) - \cos \theta_i}{\left(\frac{Z_t}{Z_i}\right) + \cos \theta_i}$$

$$(4.236) \quad t_{\parallel} = \frac{2\left(\frac{Z_t}{Z_i}\right) \cos \theta_i}{\left(\frac{Z_t}{Z_i}\right) + \cos \theta_i}$$

$$\text{onde } \frac{Z_t}{Z_i} = \frac{\sqrt{\omega\mu_0/2\sigma} (1+j)}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\omega\epsilon_0}{2\sigma}} (1+j)$$

Exemplo 4.9 – Uma onda incidente em um condutor produz corrente na sua superfície. No caso de um bom condutor, a análise precedente demonstrou que a onda transmitida se propaga perpendicularmente à interface. Vamos calcular a densidade de corrente superficial induzida no condutor. Substituindo as relações (4.230) e (4.234) (para polarização perpendicular) em (4.223), obtemos a expressão do campo elétrico da onda transmitida:

$$(Ex.55) \quad \vec{E}_t = 2 \left(\frac{Z_c}{Z_o} \right) \cos \theta_i E_{oi} e^{-\alpha_c z} e^{-j\beta_o \text{sen}\theta_i x} e^{-j\beta_c z} \hat{x}$$

Com a propagação da onda para o seu interior, surge uma distribuição de corrente no volume do condutor. Contudo, uma vez que a onda é atenuada, essa corrente é muito mais concentrada na superfície. Como a corrente circula na direção do campo elétrico e se distribui uniformemente na interface, vamos calcular a densidade linear de corrente na superfície:

$$\begin{aligned}
 \vec{k} &= \int_0^{\infty} \sigma \vec{E}_t dz \\
 (\text{Ex.56}) \quad &= 2\sigma \left(\frac{Z_c}{Z_o} \right) \cos\theta_i E_{oi} e^{-j\beta_o \text{sen}\theta_i} x \hat{x} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha_c + j\beta_c)z} dz \\
 &= 2\sigma \left(\frac{Z_c}{Z_o} \right) \frac{\cos\theta_i}{\alpha_c + j\beta_c} E_{oi} e^{-j\beta_o \text{sen}\theta_i} x \hat{x}
 \end{aligned}$$

Podemos substituir $Z_c = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j)$ e $\alpha_c = \beta_c = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$ para obter:

$$(\text{Ex.57}) \quad \vec{k} = \frac{2}{Z_o} \cos\theta_i E_{oi} e^{-j\beta_o \text{sen}\theta_i} x \hat{x}$$

O termo de fase nesta equação informa que a corrente superficial circula como uma onda na direção x com comprimento de onda $\lambda_o / \text{sen}\theta_i$. Com incidência perpendicular, temos:

$$(\text{Ex.58}) \quad \vec{k} = \frac{2}{Z_o} E_{oi} \hat{x}$$

É interessante observar que a corrente induzida em bons condutores não depende diretamente da condutividade do material nem da frequência (obviamente a condição $\sigma \gg \omega\epsilon$ deve ser atendida para esse resultado ser válido). Para polarização paralela, deve-se usar a expressão (4.236) para o coeficiente de transmissão. Uma vez que $\cos\theta_i \gg Z_t/Z_i$ para $\theta_i < \pi/2$, praticamente a única diferença em relação aos resultados anteriores é que o termo $\cos\theta_i$ não aparece na expressão da densidade de corrente.

Onda estacionária

Consideremos uma onda plana incidindo perpendicularmente em uma interface entre dois meios. Sabemos pela análise da seção anterior que o coeficiente de reflexão é, em geral, um número complexo e, portanto, a onda refletida pode ter amplitude e fase diferente da onda incidente. Estas ondas se superpõem no meio de incidência e o resultado é uma onda que tem algumas características diferentes da onda original. Consideremos inicialmente o meio de incidência como sendo não dissipativo. Se a interface situa-se na origem do sistema de coordenadas e a onda incidente origina-se no lado direito da origem e caminha no sentido $z < 0$, as expressões dos campos elétricos incidente e refletido são:

$$(4.237) \quad \vec{E}_i = E_{oi} e^{j\beta z} \hat{x}$$

$$(4.238) \quad \vec{E}_r = r E_{oi} e^{-j\beta z} \hat{x}$$

onde r é o coeficiente de reflexão na interface. Podemos expressá-lo na forma geral:

$$(4.239) \quad r = |r| e^{j\delta}$$

O campo resultante é obtido como a soma dos campos incidente e refletido. Assim, temos:

$$(4.240) \quad \vec{E} = E_{oi} \left(e^{j\beta z} + r e^{-j\beta z} \right) \hat{x}$$

Vejamos inicialmente dois casos limites:

Caso1) Se o meio de incidência é um dielétrico perfeito fazendo interface com um condutor perfeito, o coeficiente de reflexão, de acordo com a seção anterior, vale -1 . Nesse caso, o módulo do campo elétrico total no meio de incidência é dado por:

$$(4.241) \quad E = E_{oi} \left(e^{j\beta z} - e^{-j\beta z} \right) = 2E_{oi} \operatorname{sen}\beta z e^{j\pi/2}$$

e o campo no domínio do tempo é:

$$(4.242) \quad e = 2E_{oi} \operatorname{sen}\beta z \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Esta equação representa uma onda estacionária. Observe que a amplitude do campo depende da posição no espaço. Isto é mostrado na Figura 4.22. Existem

posições de amplitude máxima $2E_{oi}$ e posições de amplitude nula. Isto é completamente diferente do que ocorre em uma onda plana uniforme se propagando em um meio ilimitado, pois se o meio é não dissipativo, a amplitude do campo em toda parte é sempre a mesma. Além disso, vemos em (4.242) que o fator de fase βz não aparece junto com ωt na função monocromática. Em vista disso, o campo descrito nesta equação não constitui uma onda ‘caminhante’.

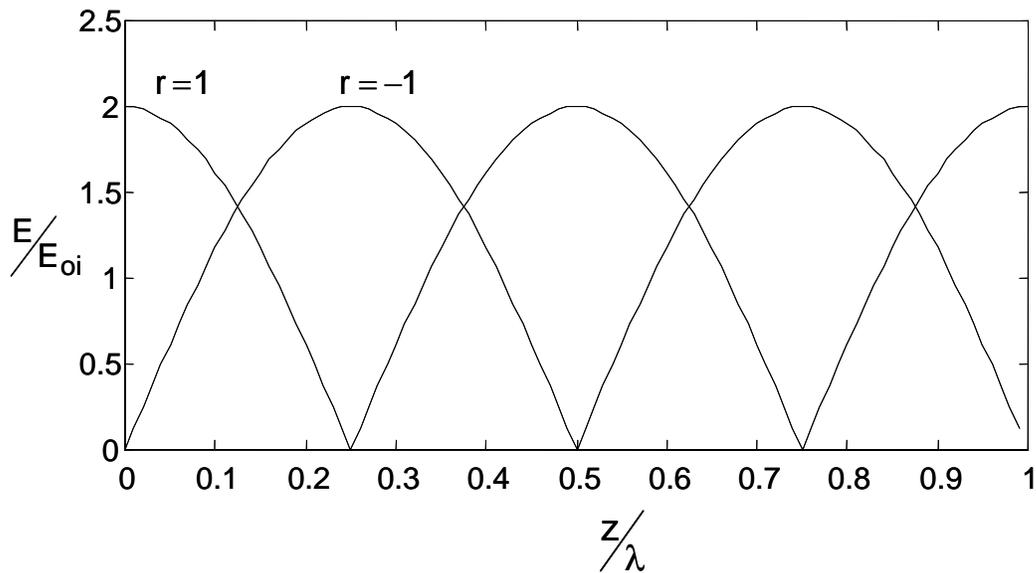


Figura 4.22 – Distribuição de amplitudes do campo elétrico em uma onda estacionária formada pela superposição dos campos incidente e refletido com coeficientes de reflexão $r = 1$ e $r = -1$.

Caso 2) Se ambos os meios são dielétricos, mas o meio de incidência tem impedância muito pequena comparada com o meio transmissor, podemos aproximar o coeficiente de reflexão por $r \cong 1$. Neste caso, temos:

$$(4.243) \quad E = E_{oi} \left(e^{j\beta z} + e^{-j\beta z} \right) = 2E_{oi} \cos \beta z$$

e o campo no domínio do tempo é:

$$(4.244) \quad e = 2E_{oi} \cos \beta z \cos \omega t$$

Esta distribuição de campo também é mostrada na Figura 4.22. Também neste caso temos uma onda estacionária de amplitude $2E_{oi}$. Observe contudo que as posições dos mínimos e máximos são diferentes nas duas ondas.

Vamos analisar agora o caso geral, no qual o coeficiente de reflexão tem um valor qualquer. Podemos manipular algebricamente a equação (4.240) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 (4.245) \quad E &= E_{oi} \left[e^{j(\beta z - \delta/2)} + |r| e^{-j(\beta z - \delta/2)} \right] e^{j\delta/2} \\
 &= E_{oi} e^{j\delta/2} \left[(1 + |r|) \cos(\beta z - \delta/2) + j(1 - |r|) \text{sen}(\beta z - \delta/2) \right]
 \end{aligned}$$

Multiplicando por $e^{j\omega t}$ e tomando a parte real, obtemos o campo no domínio do tempo:

$$\begin{aligned}
 (4.246) \quad e &= E_{oi} (1 + |r|) \cos(\beta z - \delta/2) \cos(\omega t + \delta/2) \\
 &\quad - E_{oi} (1 - |r|) \text{sen}(\beta z - \delta/2) \text{sen}(\omega t + \delta/2)
 \end{aligned}$$

Substituindo $(1 + |r|) = (1 - |r|) + 2|r|$ e usando a identidade trigonométrica $\cos(a + b) = \cos a \cos b + \text{sen} a \text{sen} b$, podemos reescrever (4.246) na forma:

$$(4.247) \quad e = E_{oi} (1 - |r|) \cos(\omega t + \beta z) + 2|r| E_{oi} \cos(\beta z - \delta/2) \cos(\omega t + \delta/2)$$

O primeiro termo nesta equação descreve uma onda que se propaga no sentido $z < 0$ com amplitude $E_{oi} (1 - |r|)$ enquanto o segundo termo é uma onda estacionária com amplitude $2|r|E_{oi}$. A Figura 4.23 mostra a distribuição de amplitude do campo elétrico em uma onda estacionária com $|r| < 1$. O ângulo polar do coeficiente de reflexão determina a posição de máximos e mínimos na distribuição do campo. Os máximos ocorrem nas posições em que $\cos(\beta z_M - \delta/2) = 1$, ou seja, o primeiro máximo ocorre em:

$$(4.248) \quad z_M = \frac{\delta}{2\beta} = \frac{\delta}{4\pi} \lambda$$

e os demais ocorrem exatamente a cada intervalo $\lambda/2$. O campo máximo é obtido de (4.246) nas posições de máximo, e valem:

$$(4.249) \quad E_{\max} = E_{oi} (1 + |r|)$$

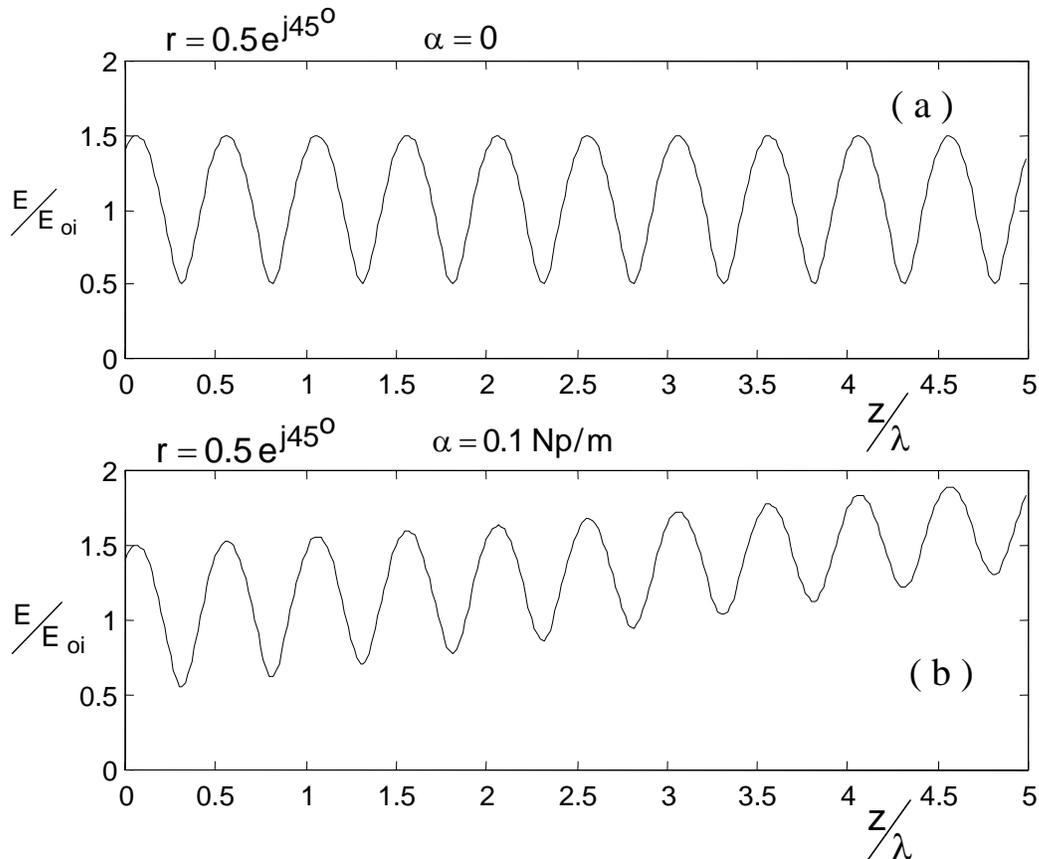


Figura 4.23 – Distribuição de amplitudes do campo elétrico na superposição de uma onda incidente com amplitude unitária com a onda refletida com coeficiente de reflexão $r = 0.5 e^{j45^\circ}$. (a) meio sem perdas; (b) meio com coeficiente de atenuação de 0.1 Np/m.

De modo análogo obtemos as posições de mínimo na distribuição de campo resolvendo a equação $\cos(\beta z_m - \delta/2) = 0$, ou seja, o primeiro mínimo ocorre em:

$$(4.250) \quad z_m = \frac{\delta + \pi}{2\beta} = \frac{\delta + \pi}{4\pi} \lambda$$

e um novo mínimo ocorre a cada intervalo $\lambda/2$. A distância entre mínimos e máximos consecutivos é $\lambda/4$. O valor do campo nas posições de mínimo é obtido de (4.246) na forma:

$$(4.251) \quad E_{\min} = E_{oi} (1 - |r|)$$

Define-se a razão de onda estacionária ROE (do Inglês SWR) como sendo o quociente entre o campo máximo e o campo mínimo na distribuição de campo.

$$(4.252) \quad ROE = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{1+|r|}{1-|r|}$$

A ROE é um parâmetro que quantifica a presença de onda estacionária em um meio. A ROE mínima é 1 e acontece quando não existe onda estacionária, pois nesse caso a amplitude do campo é igual em todas as posições do espaço. Um valor de ROE maior que 1 indica a presença de onda estacionária. No caso limite de uma onda estacionária pura, como acontece nos exemplos citados acima em que $r = \pm 1$, a ROE é infinita.

No caso em que o meio de incidência é dissipativo, a amplitude das ondas incidente e refletida diminui exponencialmente no sentido de propagação correspondente a cada onda. Então, a maior superposição ocorre nas imediações da interface. Nessa região, a onda estacionária terá amplitude máxima e a ROE também será máxima. Mas para pontos mais afastados, a tendência é prevalecer a onda incidente, pois esta terá sempre maior amplitude que a onda refletida. A Figura 4.23 mostra a distribuição de campo nesse caso. Concluímos então que a amplitude da onda estacionária e a ROE diminuem na medida em que consideramos pontos mais afastados da interface.

Exemplo 4.10 – *Em uma onda estacionária, os máximos de campo elétrico não coincidem com os máximos de campo magnético. Além disso, não existe energia transportada. Podemos verificar na equação (Ex.36) que se o coeficiente de reflexão for unitário, a parte real do vetor de Poynting complexo é nula. Assim, em uma onda estacionária existe apenas energia reativa armazenada no espaço, com regiões de máxima energia elétrica e máxima energia magnética em diferentes posições. Com $r = \pm 1$, a parte imaginária do vetor de Poynting é dada por:*

$$(Ex.59) \quad \vec{S}_r = -\frac{E_{oi}^2}{Z_o} \text{sen}(2\beta z) \hat{z} \quad \rightarrow \quad r = -1$$

$$(Ex.60) \quad \vec{S}_r = \frac{E_{oi}^2}{Z_o} \text{sen}(2\beta z) \hat{z} \quad \rightarrow \quad r = 1$$

Das equações (4.241) e (4.243) temos o campo elétrico na direção x na onda estacionária.

$$(Ex.61) \quad E = E_{oi} \left(e^{j\beta z} - e^{-j\beta z} \right) = j2E_{oi} \operatorname{sen}\beta z \quad \rightarrow \quad r = -1$$

$$(Ex.62) \quad E = E_{oi} \left(e^{j\beta z} + e^{-j\beta z} \right) = 2E_{oi} \cos\beta z \quad \rightarrow \quad r = 1$$

Contudo, o campo magnético tem uma distribuição diferente. Uma vez que o produto vetorial do campo elétrico com o campo magnético deve estar dirigido na direção e sentido de propagação da onda, devemos ajustar o sinal da onda refletida de campo magnético para que isso aconteça. Portanto, segundo as equações (Ex.61) e (Ex.62), temos as seguintes expressões do campo magnético na direção y na onda estacionária:

$$(Ex.63) \quad H = \frac{E_{oi}}{Z_o} \left(e^{j\beta z} + e^{-j\beta z} \right) = 2 \frac{E_{oi}}{Z_o} \cos\beta z \quad \rightarrow \quad r = -1$$

$$(Ex.64) \quad H = \frac{E_{oi}}{Z_o} \left(e^{j\beta z} - e^{-j\beta z} \right) = 2 \frac{E_{oi}}{Z_o} \operatorname{sen}\beta z \quad \rightarrow \quad r = 1$$

A Figura 4.24 mostra como os campos e a potência reativa se distribuem na onda estacionária para $r = -1$.

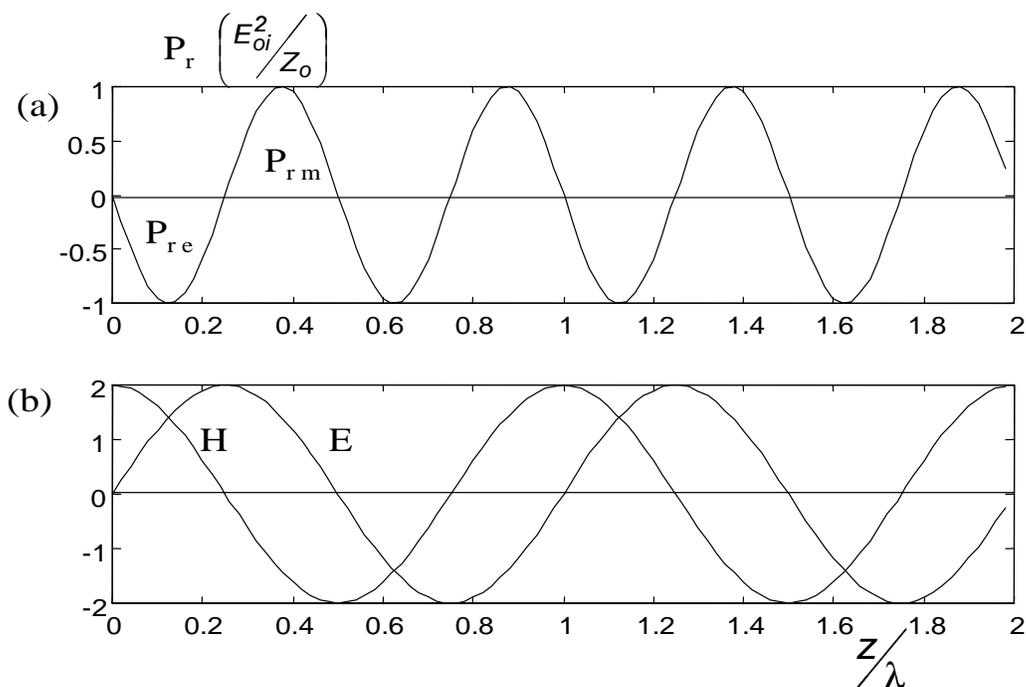


Figura 4.24 – (a) Distribuição de potência reativa na onda estacionária. (b) distribuição de campo elétrico e campo magnético na onda estacionária. Coeficiente de reflexão $r = -1$.

Espectro Eletromagnético

Não existem limites para a frequência de um sinal eletromagnético. Ondas eletromagnéticas com frequência de alguns Hertz a mais de 10^{24} Hertz podem ser geradas. Contudo, diferentes características de propagação e fenômenos de interação com a matéria determinam diferentes aplicações para os sinais eletromagnéticos, dependendo de sua frequência.

A Tabela 4.7 mostra o espectro eletromagnético conhecido, dividido e classificado de acordo com o uso principal de cada intervalo de frequências. Até cerca de 300 GHz, é mais usual a especificação da onda eletromagnética pela sua frequência. A partir daí até o final da faixa de luz visível, é mais comum especificar o comprimento de onda. Do ultravioleta em diante é mais usual especificar o sinal eletromagnético pela energia de fóton.

As ondas na faixa que se estende de alguns hertz até 1GHz são denominadas genericamente de ondas de radio, pois é especialmente nesta faixa que a maioria dos sistemas de comunicação de massa operam. Exemplos típicos desses serviços são o rádio comercial, a televisão e o radio amador. A absorção de energia pela matéria, nesta faixa de frequências, ocorre quase que exclusivamente pela condução de cargas livres.

Acima de 1GHz e até 300GHz usa-se a designação geral de microondas. Aplicações especiais em comunicação via satélite e radar são comuns nesta faixa. A região de frequências mais baixas nesta faixa é utilizada atualmente para telefonia móvel. As moléculas polares absorvem energia na faixa de microondas especialmente através de ressonâncias com estados rotacionais. O forno de microondas opera em 2.45Ghz porque nesta frequência as moléculas de água absorvem eficientemente a energia da onda.

Acima de 300GHz e até cerca de 400THz existe a faixa denominada de infravermelho, que costuma ser dividida em infravermelho próximo (comprimento de onda entre $0.78\mu\text{m}$ a $3\mu\text{m}$ no vácuo), infravermelho intermediário ($3\mu\text{m}$ a $6\mu\text{m}$) e infravermelho distante ($6\mu\text{m}$ a $15\mu\text{m}$). A radiação no espectro infravermelho pode ser absorvida na matéria gerando transições entre estados vibracionais moleculares. Qualquer corpo aquecido emite radiação no infravermelho através do

mesmo mecanismo de transições vibracionais. O corpo humano, por exemplo, emite radiação numa ampla faixa do infravermelho e com intensidade máxima em torno de $10\mu\text{m}$.

A luz visível corresponde a um estreito intervalo de comprimentos de onda de $0.38\mu\text{m}$ a $0.72\mu\text{m}$ no vácuo. A radiação nesta faixa de frequências é geralmente produzida por alterações nos estados eletrônicos em átomos e moléculas. Moléculas de gases excitados por calor ou corrente elétrica e átomos em metais aquecidos a altas temperaturas são as fontes mais comuns de luz visível. As cores são o resultado da percepção humana da radiação no espectro visível captado pelo sistema visual. O espectro visível pode ser dividido nas seguintes cores: vermelho de 622 a 720 nm, laranja de 597 a 622 nm, amarelo de 577 a 597 nm, verde de 492 a 577 nm, azul de 455 a 492 nm e violeta de 380 a 455 nm.

Abaixo do menor comprimento de onda da luz violeta, começa a faixa denominada de ultravioleta, caracterizada por energias de fótons de 3.3 eV a 124 eV. A radiação ultravioleta tem uma grande capacidade de ionizar átomos e moléculas. A radiação solar, que contém uma grande parcela de radiação ultravioleta, poderia ser letal à vida em nosso planeta, se não houvesse a camada protetora de ozônio na atmosfera, absorvendo intensamente a energia solar nessa faixa espectral. A radiação ultravioleta é produzida em transições eletrônicas nos átomos envolvendo grande variação de energia, por exemplo, quando um elétron fortemente ligado é excitado para níveis de energia maiores e depois retorna ao nível original ou quando ocorre recombinação entre íons e elétrons.

Os raios X apresentam energias de fóton muito altas, desde 124 eV até cerca de 200 KeV e podem ser produzidos por bombardeamento de um alvo metálico por um feixe de elétrons energéticos (radiação de frenagem), como ocorre em tubos de raios X. Emissão de raios X também ocorre na recombinação de átomos ionizados envolvendo elétrons internos fortemente ligados ao núcleo.

No topo do espectro estão os raios gama, os quais possuem energias de fóton extremas e são emitidos durante reações nucleares onde ocorre transições entre diferentes estados de energia das partículas constituintes do núcleo atômico.

Tabela 4.7 – Classificação do Espectro Eletromagnético

Classificação	Faixa de frequências f (Hz)	Intervalo de Comprimento de onda λ	Intervalo de Energia de fóton $E = hf = hc/\lambda$
raios γ	$5 \times 10^{19} - 10^{24}$	6 pm – 3×10^{-16} m	200 KeV – 4 GeV
raios X	$3 \times 10^{16} - 5 \times 10^{19}$	10nm – 6 pm	0.124 – 200 KeV
ultravioleta	$7.9 \times 10^{14} - 3 \times 10^{16}$	380 nm – 10 nm	3.26 eV – 124 eV
Luz Visível	$4.2 \times 10^{14} - 7.9 \times 10^{14}$	0.72 – 0.38 μ m	1.72 – 3.26 eV
Infravermelho	$\sim 10^{12} - 4.2 \times 10^{14}$	100 – 0.72 μ m	0.0124 – 1.72 eV
ondas milimétricas	300 G - $\sim 10^{12}$	1 – 0.1 mm	$1.24 \times 10^{-14} - 1.24 \times 10^{-2}$ eV
EHF	30 – 300 G	1 – 0.1 cm	
SHF	3 – 30 G	10 - 1 cm	
UHF	0.3 – 3 G	1 – 0.1 m	
VHF	30 – 300 M	10 – 1 m	
HF	3 – 30 M	100 – 10 m	
MF	0.3 – 3 M	1 – 0.1 Km	
LF	30 – 300 K	10 – 1 Km	
VLF	3 – 30 K	100 – 10 Km	
ULF	0.3-3 K	1 – 0.1 Mm	
SLF	30-300	10 – 1 Mm	
ELF	3-30	$10^2 - 10$ Mm	

Apêndice 4.1

Introdução à teoria ondulatória

Uma onda é uma forma geral de transporte de energia através de uma ou mais grandezas físicas que estão sujeitas a um processo oscilatório. Ondas ocorrem em muitos sistemas físicos diferentes, tais como: ondas de deslocamento mecânico em estruturas sólidas, ondas de pressão em fluidos, ondas de elevação na superfície da água, ondas eletromagnéticas, etc. Embora envolvam diferentes processos físicos, todas as ondas podem ser descritas basicamente pelos mesmos modelos matemáticos.

Consideraremos inicialmente a descrição de uma onda unidimensional simples. Trata-se de uma onda que descreve a propagação de uma grandeza escalar em uma única direção. Seja esta direção coincidente com o eixo z do sistema de coordenadas. A forma geral de representação da onda é dada por:

$$(A.161) \quad \varphi(z, t) = \varphi_1 f(\beta z - \omega t) + \varphi_2 f(\beta z + \omega t)$$

onde f é uma função qualquer e os parâmetros ω e β são constantes. Os coeficientes φ_1 e φ_2 são as amplitudes da onda. Na verdade, cada termo no segundo membro descreve uma onda separadamente. O primeiro termo descreve uma onda que se propaga no sentido $z > 0$ e o segundo termo descreve uma onda que se propaga no sentido $z < 0$. Isso é ilustrado na Figura 4.25 que mostra a distribuição espacial da grandeza φ em diferentes instantes de tempo. A fim de avaliar a velocidade de deslocamento da onda, basta tomar um ponto qualquer da distribuição ($\beta z - \omega t = \text{cte}$) e calcular a taxa de variação da posição daquele ponto.

Então, a derivada de $z = \frac{\omega}{\beta} t + \frac{\text{cte}}{\beta}$ no tempo resulta em:

$$(A.162) \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

Evidentemente, para a onda com argumento $\beta z + \omega t$, a velocidade é o negativo de (A.162). Então, em uma descrição baseada na velocidade da onda, a equação (A.161) pode ser escrita na forma:

$$(A.163) \quad \varphi(z, t) = \varphi_1 f(z - vt) + \varphi_2 f(z + vt)$$

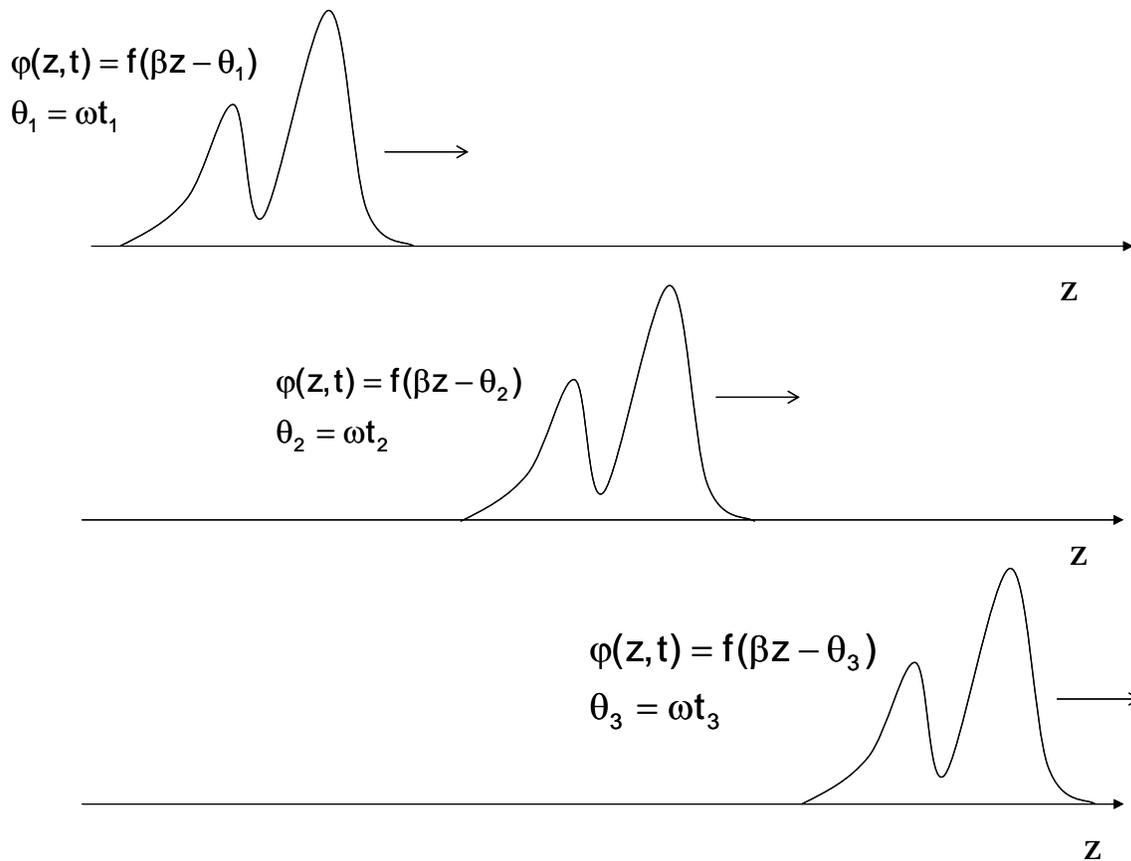


Figura 4.25 – Representação do deslocamento de uma onda com forma arbitrária $f(\beta z - \omega t)$ em três instantes de tempo.

A função que descreve a onda é sempre a solução de uma equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema físico no qual a onda é gerada e se propaga. Essa equação, por sua vez, deve ser obtida particularmente para cada sistema, segundo os princípios físicos característicos do sistema. Contudo, a forma geral da equação diferencial, chamada equação de onda, pode ser obtida a partir da solução geral proposta em (A.161) como segue. Definindo $\eta_1 = \beta z - \omega t$ e $\eta_2 = \beta z + \omega t$, as segundas derivadas no tempo e no espaço da função $\varphi(z,t)$ são dadas por (demonstração a cargo do leitor):

$$(A.164) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \beta^2 \left(\varphi_1 \frac{d^2 f}{d\eta_1^2} + \varphi_2 \frac{d^2 f}{d\eta_2^2} \right)$$

$$(A.165) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \omega^2 \left(\varphi_1 \frac{d^2 f}{d\eta_1^2} + \varphi_2 \frac{d^2 f}{d\eta_2^2} \right)$$

Assim, podemos combinar os resultados acima para obter:

$$(A.166) \quad \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\beta^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Esta é a forma básica da equação de onda unidimensional.

Um caso particular de grande interesse é a onda monocromática ou onda harmônica:

$$(A.167) \quad \varphi(z, t) = \varphi_0 \operatorname{sen}(\beta z - \omega t)$$

ou,

$$(A.168) \quad \varphi(z, t) = \varphi_0 \operatorname{cos}(\beta z - \omega t)$$

Segundo os métodos da análise de Fourier, é possível descrever uma onda periódica qualquer por uma série infinita de termos discretos de ondas harmônicas com frequências múltiplas de uma frequência fundamental ω_0 . A expressão geral tem a forma:

$$(A.169) \quad \varphi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_{1n} \operatorname{cos}(\beta_n z - \omega_n t) + \varphi_{2n} \operatorname{sen}(\beta_n z - \omega_n t)]$$

onde $\omega_n = n\omega_0$ e $\beta_n = \frac{\omega_n}{v_n} = n \frac{\omega_0}{v_n}$. Note que a velocidade de propagação pode ser

diferente para cada componente, e se isso ocorre, as componentes sofrem deslocamentos relativos umas às outras. Isto, por sua vez, implica em que a forma da onda resultante pode se modificar com o passar do tempo.

Consideremos o exemplo mostrado na Figura 4.26a. A onda quadrada tem a frequência fundamental $\omega_0 = 1000 \operatorname{rad/s}$. Decompondo esta onda nas componentes de Fourier segundo o método mostrado no Apêndice 3.1, concluímos que os coeficientes φ_{1n} são todos nulos e apenas os coeficientes φ_{2n} com n ímpar são não nulos. Supondo $v = 1000 \operatorname{m/s}$ e independente da frequência,

teremos $\beta_0 = 1 \text{ rad/m}$. Com isso, obtemos a expansão da onda quadrada em série de ondas harmônicas na forma:

$$(A.170) \quad \varphi(z,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n} \text{sen}[n(z - 1000 t)]$$

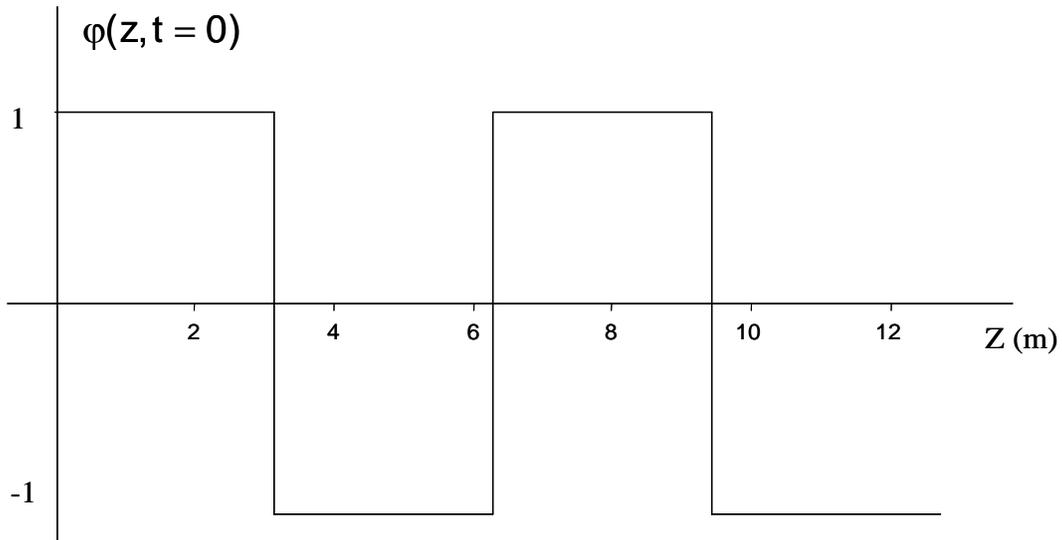


Figura 4.26a - Onda quadrada de amplitude unitária, frequência angular 1000 rad/s e constante β unitária em $t=0$.

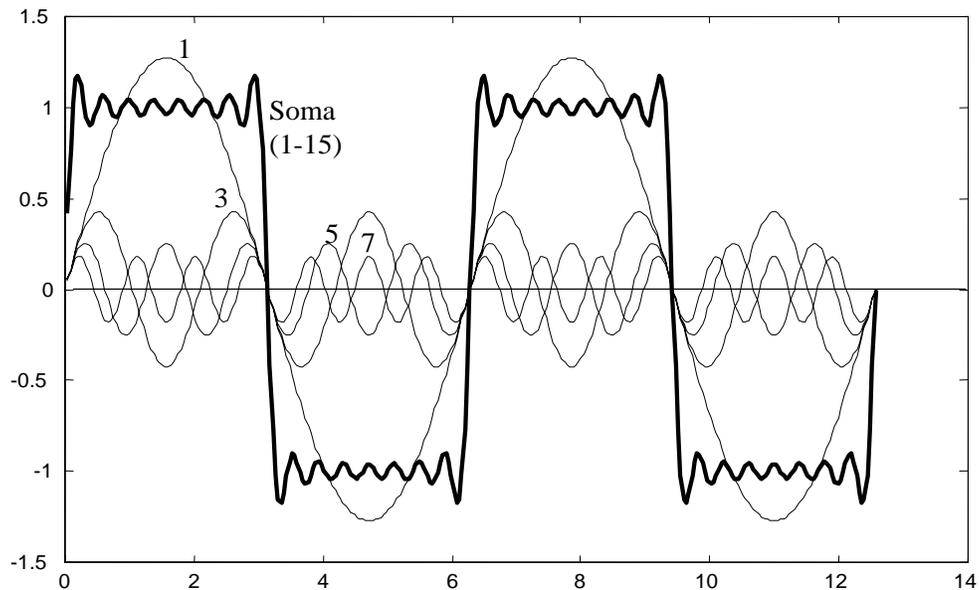


Figura 4.26b – Quatro primeiras harmônicas ímpares da onda quadrada e a soma das harmônicas de 1 a 15.

Ou seja, a onda quadrada de amplitude unitária e frequência ω_0 pode ser representada como a soma de um número infinito de ondas senoidais com frequências $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, 7\omega_0, \dots$, e com amplitudes decrescentes $\frac{4}{\pi}, \frac{4}{3\pi}, \frac{4}{5\pi}, \frac{4}{7\pi}, \dots$, respectivamente. A Figura 4.26b mostra os gráficos das primeiras harmônicas e a soma das harmônicas de 1 a 15. Evidentemente, quanto mais termos forem incluídos na soma, mais precisa será a representação da onda original. Note também que as harmônicas de maior frequência têm menor amplitude. Isso sempre acontece com funções que representam ondas reais, ou seja, ondas de grandezas físicas.

As ondas eletromagnéticas são ondas de campo elétrico e magnético que se propagam com a mesma velocidade a partir de uma fonte comum variável no tempo. Como os campos são vetores, a descrição completa de ondas eletromagnéticas exige equações de onda nas três coordenadas espaciais envolvendo as três componentes de campo elétrico e as três componentes de campo magnético. Isto é, a descrição de ondas eletromagnéticas é consideravelmente mais complexa que as ondas unidimensionais apresentadas neste apêndice. Contudo, três casos com geometrias simples se destacam pela importância conceitual em relação à propagação de ondas eletromagnéticas no espaço livre:

A onda plana uniforme (Figura 4.27a) é uma onda que se propaga em uma direção definida e têm os campos perpendiculares entre si e à direção de propagação. Em cada plano perpendicular a esta direção, os campos têm a mesma amplitude, direção e sentido. Esses planos são chamados de frentes de onda. As equações de onda para os campos assumem a forma já descrita em (A.166) no caso de uma onda se propagando na direção z . Se o campo elétrico está orientado na direção x e o campo magnético está orientado na direção y , temos:

$$(A.171) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{e}_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{h}_y}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

As soluções para esses campos no caso de uma fonte monocromática podem ser escritas na forma:

$$(A.172) \quad \begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_{x_0} \cos(\omega t - \beta z) \\ \mathbf{h}_y &= \mathbf{h}_{y_0} \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

O vetor de Poynting $\vec{s} = \vec{e} \times \vec{h}$, apresentado no Apêndice 4.2, indica que o fluxo de potência da onda eletromagnética se dá na direção perpendicular aos vetores de campo. No caso da onda plana o fluxo de potência é unidirecional (direção $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$).

A onda cilíndrica uniforme (Figura 4.27b) é uma onda que se propaga a partir de uma fonte infinita e uniforme ao longo do eixo z . Com isso, a frente de onda é uma superfície cilíndrica centrada na fonte e a onda se propaga na direção radial. Em todos os pontos da frente de onda os campos têm a mesma amplitude. O campo elétrico está orientado na direção axial e o campo magnético na direção azimutal. A equação de onda nesse caso é diferente da forma simples unidimensional da equação (A.166). É mostrado no capítulo 4 que a forma geral da equação de onda envolve o laplaciano dos campos, no lugar da segunda derivada na coordenada z em (A.166). No caso da onda cilíndrica uniforme, a simetria cilíndrica da frente de onda nos permite simplificar a equação de onda usando apenas a parte radial do laplaciano em coordenadas cilíndricas. Assim, segundo o Apêndice 2.1, temos:

$$(A.173) \quad \begin{aligned} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial s} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}_z}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \mathbf{h}_\phi}{\partial s} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{h}_\phi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

As soluções destas equações envolvem o uso das funções de Bessel. Para grandes distâncias da fonte, contudo, essas soluções tendem para a seguinte forma trigonométrica, no caso de fontes harmônicas:

$$(A.174) \quad \begin{aligned} e_z &= \frac{C_1}{\sqrt{s}} \cos(\omega t - \beta s) \\ h_\phi &= \frac{C_2}{\sqrt{s}} \cos(\omega t - \beta s) \end{aligned}$$

Onde C_1 e C_2 são constantes. Na onda cilíndrica uniforme o fluxo de potência ocorre na direção radial (direção $\hat{s} = \hat{\phi} \times \hat{z}$). Os campos são atenuados na medida em que a área da frente de onda se expande, mas a energia total transportada através dessa área é constante.

A Onda esférica uniforme (Figura 4.27c) é uma onda que se propaga a partir de uma fonte pontual irradiando isotropicamente (mesma intensidade em todas as direções). Assim, a frente de onda é uma superfície esférica se propagando na direção radial. Nesse caso, se assumirmos que o campo elétrico está orientado na direção polar e o campo magnético na direção azimutal, podemos obter uma expressão da equação de onda, considerando apenas a parte radial do laplaciano em coordenadas esféricas (Apêndice 2.1):

$$(A.175) \quad \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r e_\theta) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 e_\theta}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r h_\phi) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 h_\phi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Para fontes harmônicas, as soluções dessas equações são dadas por:

$$(A.176) \quad \begin{aligned} e_\theta &= \frac{C_1}{r} \cos(\omega t - \beta r) \\ h_\phi &= \frac{C_2}{r} \cos(\omega t - \beta r) \end{aligned}$$

Na onda esférica uniforme o fluxo de potência ocorre na direção radial (direção $\hat{r} = \hat{\theta} \times \hat{\phi}$). Os campos são atenuados na medida em que a área da frente de onda se expande, mas a energia total transportada através dessa área é constante.

Esses três exemplos de onda eletromagnética uniforme (plana, cilíndrica e esférica) são ondas conceituais. Elas não existem de fato, mas, as ondas reais muitas vezes podem ser aproximadas por uma dessas formas idealizadas, principalmente em posições suficientemente distantes das fontes. Essas ondas

são denominadas de ondas transversais, pois os campos são perpendiculares à direção de propagação.

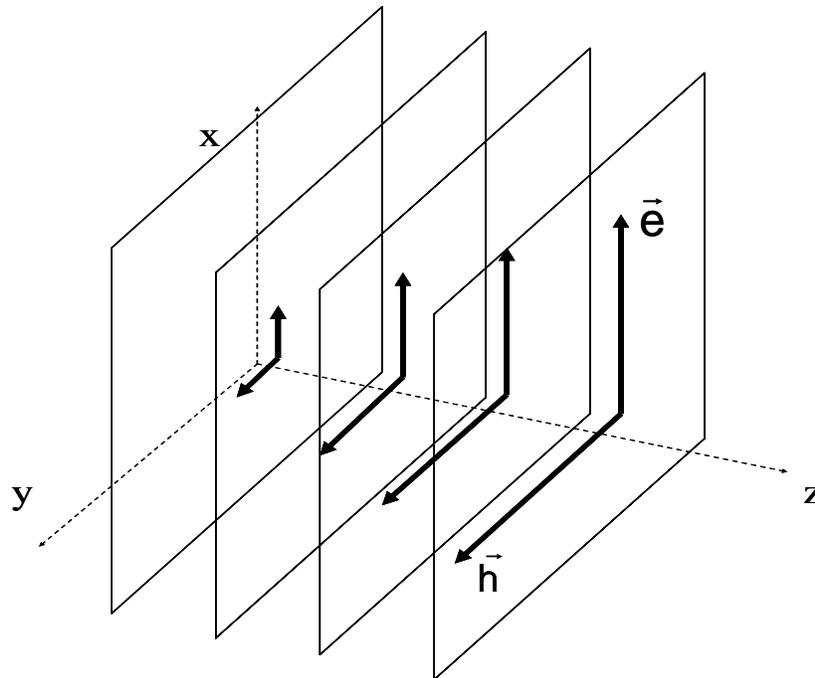


Figura 4.27a – Representação da onda plana uniforme. A frente de onda é uma superfície plana.

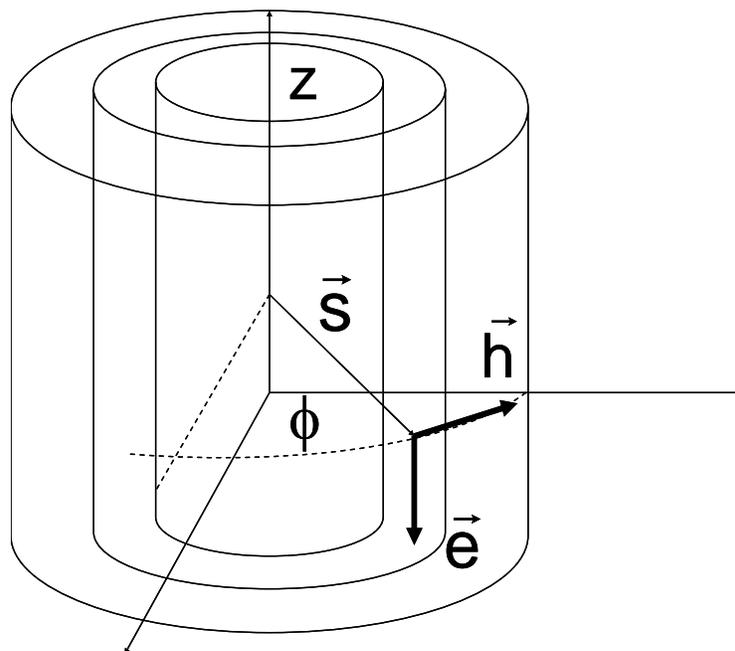


Figura 4.27b – Representação da onda cilíndrica uniforme. A frente de onda é uma superfície cilíndrica.

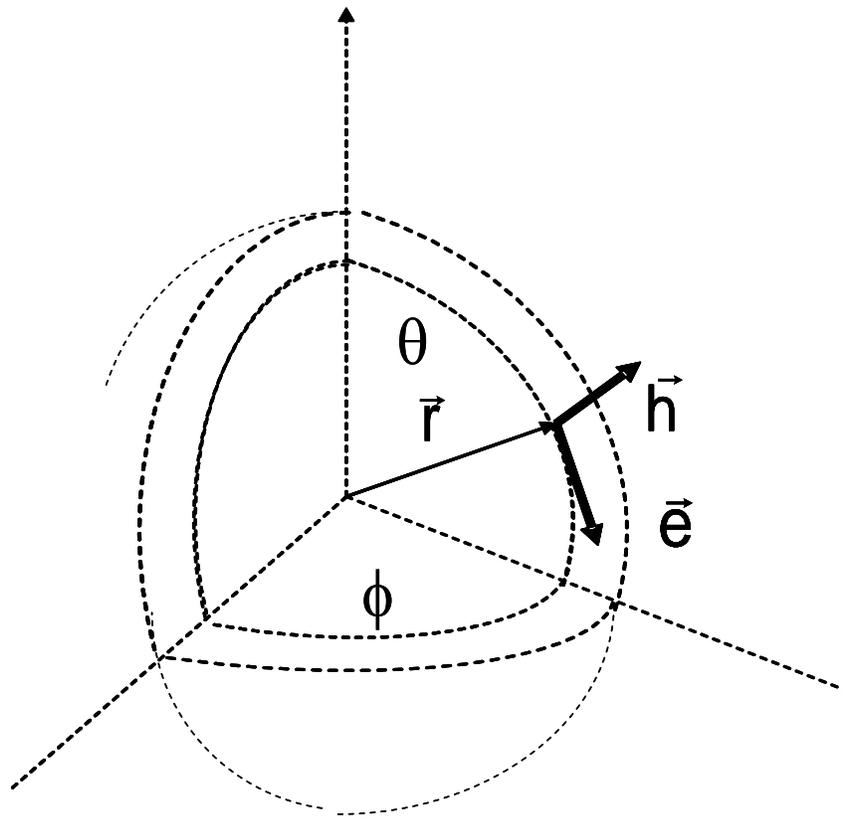


Figura 4.27c – Representação da onda esférica uniforme. A frente de onda é uma superfície esférica.

Apêndice 4.2

Teorema de Poynting

Energia dissipada - Energia de polarização - Energia de magnetização

A energia necessária para estabelecer as distribuições de carga e corrente é exatamente a mesma energia necessária para criar os campos elétrico e magnético associados a essas fontes. No vácuo essa energia é simplesmente armazenada no espaço. Entretanto, em qualquer meio constituído de moléculas, a energia necessária para estabelecer os campos no espaço envolve alguns termos adicionais relacionados à interação dos campos com as partículas carregadas nessas moléculas. Podem-se distinguir três termos adicionais:

1) **Trabalho realizado pelo campo** no movimento de translação de partículas móveis. O movimento coletivo de cargas é descrito pela densidade de corrente no meio. A energia transferida para as cargas contidas no volume dv em um intervalo de tempo δt é:

$$(A.177) \quad dW_t = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \rho \vec{e} \cdot \vec{v} \delta t = \vec{j} \cdot \vec{e} \delta t$$

Então, o trabalho de translação realizado por unidade de tempo e por unidade de volume, chamado de densidade de potência dissipada no meio, é dada por:

$$(A.178) \quad p_{\text{diss}} = \frac{dW_t}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{e}$$

2) **Energia de polarização do meio.** Os dipolos elétricos moleculares tendem a se alinhar com o campo aplicado, mas devido à agitação térmica, existe um espalhamento randômico nas orientações dos momentos de dipolo em relação ao campo. Contudo, em uma grande classe de materiais, a polarização, definida como o momento total de dipolo por unidade de volume (\vec{p}), é proporcional ao campo aplicado (\vec{e}_0). A densidade de energia de polarização é dada por:

$$(A.179) \quad w_{\text{pol}} = -\frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{e}_0$$

Uma vez que os dipolos elétricos do material também criam campo elétrico no meio, o campo total é diferente do campo aplicado. Esta dependência do campo elétrico total com a polarização das moléculas do material é descrita pela constante dielétrica do meio (ϵ_r). Para um meio polarizável de extensão infinita, a relação entre o campo gerado no vácuo (\vec{e}_0) e o campo total nesse meio para uma mesma distribuição de cargas, é dada por:

$$(A.180) \quad \vec{e} = \frac{\vec{e}_0}{\epsilon_r}$$

Então, a energia por unidade de volume para criar uma distribuição de cargas em um meio polarizável é diferente daquela calculada para o vácuo e obtida na expressão (3.75). A diferença está no fato de que além do trabalho realizado na movimentação das cargas até a configuração final, a fonte necessita realizar trabalho adicional para alinhar os dipolos elétricos do material. Assim a densidade de energia total no meio polarizável é dada por:

$$(A.181) \quad w_e = w_o + w_{\text{pol}} = \frac{1}{2} \varepsilon_o |\vec{e}_o|^2 - \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{e}_o$$

Pode-se mostrar que substituindo ε_o por $\varepsilon_r \varepsilon_o$ em (3.75), obtém-se exatamente o resultado (A.181), ou seja, a densidade de energia elétrica em um meio polarizável também pode ser calculada por:

$$(A.182) \quad w_e = \frac{1}{2} \vec{d} \cdot \vec{e} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{d}|^2}{\varepsilon_r \varepsilon_o} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_o |\vec{e}|^2$$

onde a relação constitutiva correta agora é $\vec{d} = \varepsilon_r \varepsilon_o \vec{e}$.

3) Energia de magnetização do meio. De modo análogo ao processo de polarização descrito acima, a magnetização do meio ocorre pela tendência de alinhamento dos momentos de dipolo magnético moleculares com o campo magnético aplicado. O vetor de magnetização (\vec{m}) do meio é definido como o momento total de dipolo magnético por unidade de volume do material. Os materiais denominados paramagnéticos e diamagnéticos se magnetizam de maneira proporcional ao campo aplicado. Para esses materiais, a densidade de energia de magnetização é dada por:

$$(A.183) \quad w_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{m} \cdot \vec{b}_o$$

onde \vec{b}_o é a indução magnética aplicada, ou seja, a indução magnética no vácuo para a mesma distribuição de corrente. Contudo, como os dipolos também produzem indução magnética, a indução resultante da aplicação do campo em um meio magnetizável é diferente de \vec{b}_o , sendo dada por:

$$(A.184) \quad \vec{b} = \vec{b}_o + \vec{b}_m$$

onde \vec{b}_m é a indução resultante da magnetização do meio. Nos meios que se magnetizam proporcionalmente ao campo aplicado, a indução resultante ainda pode ser dada por:

$$(A.185) \quad \vec{b} = \mu_r \vec{b}_o$$

onde μ_r é a permeabilidade magnética relativa do meio. Devido ao trabalho adicional para o alinhamento dos dipolos magnéticos do meio, o trabalho total para

criar uma distribuição de corrente em um meio magnetizável é diferente daquele calculado para o vácuo e expresso pela equação (3.85). Assim, a densidade de energia magnética em um meio linear é dada por:

$$(A.186) \quad w_m = w_o + w_{mag} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{b}_o|^2}{\mu_o} + \frac{1}{2} \vec{m} \cdot \vec{b}_o$$

Pode-se mostrar que a equação (3.85) fornece o valor correto da energia total dada em (A.31) se μ_o for substituído por $\mu_r \mu_o$. Assim, temos:

$$(A.187) \quad w_m = \frac{1}{2} \vec{b} \cdot \vec{h} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{b}|^2}{\mu_r \mu_o} = \frac{1}{2} \mu_r \mu_o |\vec{h}|^2$$

onde agora a relação constitutiva correta é $\vec{b} = \mu_r \mu_o \vec{h}$.

Vetor de Poynting e fluxo de potência

Vimos acima que a energia dispensada pelas fontes para estabelecer as distribuições de carga e corrente no espaço fica armazenada nos campos e uma parte dessa energia é utilizada para polarizar e magnetizar as moléculas do meio. Em meios dissipativos, uma parte da energia fornecida pelas fontes também é consumida como trabalho sobre as cargas móveis do material. Desejamos obter agora uma relação que demonstre a transformação e conservação de energia em sistemas eletromagnéticos. Consideremos uma amostra de matéria sujeita a campos eletromagnéticos. Em cada instante de tempo podemos calcular a energia armazenada em seu volume como a integral da densidade de energia eletromagnética:

$$(A.188) \quad w = \int_0^d \vec{e} \cdot \delta \vec{d} + \int_0^b \vec{h} \cdot \delta \vec{b}$$

Note que essa energia armazenada já considera a parcela de energia dispensada para a polarização e magnetização da amostra, pois os campos em (A.188) são os campos totais, incluindo os campos criados pelos dipolos elétricos e magnéticos do material. Se o material consome energia eletromagnética que se converte em trabalho sobre suas cargas livres, a energia armazenada deve, a princípio, variar

no tempo de acordo com a quantidade de trabalho realizado. Calculemos, então, a taxa de variação temporal da densidade de energia w :

$$(A.189) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \vec{e} \cdot \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} + \vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$$

Substituindo agora as taxas de variação temporal dos campos de acordo com as leis de Ampere e Faraday, obtemos:

$$(A.190) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \vec{e} \cdot (\nabla \times \vec{h} - \vec{j}) - \vec{h} \cdot (\nabla \times \vec{e}) = -\vec{j} \cdot \vec{e} - [\vec{h} \cdot (\nabla \times \vec{e}) - \vec{e} \cdot (\nabla \times \vec{h})]$$

De acordo com a identidade vetorial $\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{f}$, podemos substituir o termo entre colchete nesta equação por $\nabla \cdot (\vec{e} \times \vec{h})$. Então, temos:

$$(A.191) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{e} - \nabla \cdot (\vec{e} \times \vec{h})$$

Este resultado é conhecido como **teorema de Poynting**. O primeiro termo no lado direito desta equação é a potência dissipada por unidade de volume da amostra. O segundo termo nos leva ao conceito de fluxo de potência através da superfície da amostra e à definição do vetor de Poynting, dado por:

$$(A.192) \quad \vec{s} = \vec{e} \times \vec{h}$$

Então, o princípio de conservação de energia eletromagnética pode ser descrito pela equação:

$$(A.193) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -p_{\text{diss}} - \nabla \cdot \vec{s}$$

O significado físico desta equação é mais bem compreendido quando consideramos a energia total envolvido no volume da amostra:

$$(A.194) \quad \frac{dW}{dt} = -\iiint_{V_a} p_{\text{diss}} dv - \iiint_{V_a} \nabla \cdot \vec{s} dv = -P_{\text{diss}} - \iint_{S_a} \vec{s} \cdot d\vec{s}$$

A energia eletromagnética é consumida no trabalho sobre as cargas livres do material e no fluxo de potência para fora da amostra, cuja densidade superficial é dada pelo vetor de Poynting. Por outro lado, se a energia eletromagnética total no volume de um corpo material não varia no tempo, (A.194) nos leva a concluir que:

$$(A.195) \quad \iint_{S_a} \vec{s} \cdot d\vec{s} = -P_{\text{diss}}$$

ou seja, a dissipação de energia na amostra é compensada pelo fluxo de potência eletromagnética para dentro do material. Finalmente, se o volume considerado envolve uma fonte de energia eletromagnética, então (A.194)) deve incluir a potência P_s fornecida por essa fonte:

$$(A.196) \quad \frac{dW}{dt} = P_s - P_{\text{diss}} - \iint_{S_a} \vec{s} \cdot d\vec{s}$$

Exercícios Propostos

1) Partindo das equações de Maxwell para um meio linear e isotrópico, encontre as equações de onda para os campos elétrico e magnético, no domínio do tempo e da frequência.

2) Demonstre que:

$$\vec{e} = \vec{e}_0 \exp(\mp \alpha z) \cos(\omega t \mp \beta z + \theta_e)$$

$$\vec{h} = \vec{h}_0 \exp(\mp \alpha z) \cos(\omega t \mp \beta z + \theta_h)$$

são soluções das equações de onda eletromagnética e encontre as relações entre as amplitudes \vec{e}_0 e \vec{h}_0 e as fases iniciais θ_e e θ_h . Qual o significado dos sinais \pm nestas expressões?

3) Deduza as expressões de α e β em função de σ , ϵ , μ e ω para um meio qualquer.

4) Encontre as aproximações de α e β para: (a) dielétrico perfeito; (b) condutor com $\sigma \gg \omega\epsilon$;

5) Demonstre que em uma onda plana os vetores campo elétrico, campo magnético e vetor de onda são mutuamente perpendiculares.

6) Deduza a expressão geral da impedância característica de um meio e determine o valor dessa impedância para dielétricos perfeitos e condutores com $\sigma \gg \omega\epsilon$.

7) Porque a velocidade de fase no vácuo é maior do que em qualquer outro meio? Em que circunstância a velocidade de fase varia com a frequência?

8) O que é profundidade de penetração em condutores? Como isso depende da frequência?

9) Prove que em um meio condutor as ondas com frequência $\omega \ll \sigma/\epsilon$ têm seus campos defasados de 45° .

10) Explique o significado da equação $\frac{\partial W}{\partial t} = -p_d - \nabla \cdot \vec{s}$.

11) Mostre que a parte real do vetor de Poynting complexo é a potência média por unidade de área fluindo na direção de propagação da onda.

12) Explique quais são as condições para haver: (a) Polarização linear; (b) Polarização elíptica esquerda; (c) Polarização elíptica direita; (d) Polarização circular esquerda; (e) Polarização circular direita.

13) Explique como se formam ondas estacionárias e qual a influência do coeficiente de reflexão na ROE e nos valores máximo e mínimo do campo?

14) Prove que para o ângulo de incidência igual ao ângulo de Brewster a onda paralelamente polarizada não se reflete na interface entre dois meios.

15) O que é reflexão interna total? Encontre o ângulo crítico para reflexão total em função dos índices de refração dos meios envolvidos.

16) Calcule os valores de $\gamma = \alpha + j\beta$ e $Z_0 = R_0 + jX_0$, para:

a) ar $\rightarrow \epsilon_r = 1, \mu_r = 1$ e $\sigma = 0$

b) água destilada $\rightarrow \epsilon_r = 81, \mu_r = 1$ e $\sigma = 0$

c) água do mar $\rightarrow \epsilon_r = 81, \mu_r = 1$ e $\sigma = 4 \text{ S/m}$

d) cobre $\rightarrow \epsilon_r = 1, \mu_r = 1$ e $\sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$

nas frequências 1MHz, 100MHz e 1GHz.

17) Uma onda incide perpendicularmente na interface entre dois meios. O meio onde ocorre a incidência é um dielétrico com ϵ_1 e μ_1 e o meio onde ocorre a transmissão é um condutor com σ_2, ϵ_2 e μ_2 . Calcule os coeficientes de reflexão e de transmissão para: (a) $\sigma_2 \gg \omega\epsilon_2$ e (b) $\sigma_2 \ll \omega\epsilon_2$.

18) Se o meio de incidência no exercício anterior é o ar e o outro meio é a água do mar e se a amplitude do campo incidente é 100V/m e a frequência é 100MHz, calcule a amplitude e fase das ondas refletida e transmitida e escreva as expressões completas dos vetores de campo elétrico e magnético dessas ondas.

19) Em relação ao exercício anterior, calcule ainda:

a) A ROE para a interferência entre as ondas incidente e refletida.

b) A potência média por unidade de área incidente na água;

c) A potência ativa por unidade de área no meio de incidência;

d) A potência ativa e reativa por unidade de área na água ;

20) Uma onda plana incide perpendicularmente numa interface entre o ar e uma superfície parcialmente refletora. Verifica-se que a onda estacionária apresenta uma ROE de 2 e que na distância de $\lambda/3$ da interface ocorre um mínimo na distribuição de amplitudes do campo elétrico. Com essas informações, calcule a impedância do material da superfície.

21) Qual deve ser o ângulo de incidência de uma onda circularmente polarizada para que a onda refletida seja polarizada perpendicularmente ao plano de incidência no caso de uma interface: (a) ar-água; (b) ar-vidro; (c) água-vidro. Considere o meio de incidência como sendo o primeiro citado, e $\mu_r=1$ para todos os materiais e $\epsilon_r=1$ para o ar, $\epsilon_r=81$ para água e $\epsilon_r=6$ para o vidro.

22) Em cada uma das interfaces citadas no exercício anterior verifique em qual meio a incidência deve se dar e qual deve ser o ângulo de incidência para ocorrer reflexão total.

23) Uma onda plana se propaga a partir de uma fonte em um meio com constantes $\sigma=10\text{S/m}$, $\epsilon_r=40$ e $\mu_r=1$. Se em $x=0$ a potência média irradiada por unidade de área é P_0 , calcule a intensidade dos campos elétrico e magnético em uma distância de $x=10\text{m}$ para as frequências: (a) 1Mhz; (b)100Mhz e (c)1GHz.